

相対論カー・ニューマン解を利用した太陽系惑星軌道ティティウス・ポード法則、土星リング数 最大 31 個（含む 主リング最大 9 個）および ファインリング径の導出

犬山文孝 元 九電産業(株)環境部部長

谷口 佐由利 星空愛好者 ◻Senior Power Engineer

はじめに

電子版フリー百科事典 Wikipedia においてティティウス・ポード法則(1766年に発見)は次のように掲載されている。「コンピュータによる惑星形成のシミュレーションの結果では、生成する惑星の配置は初期条件によって大きく変わり、形成後にも惑星の軌道半径の変化が起きることが分かっている。また近年、恒星のすぐ近くを公転する系外惑星の発見が相次いでいる。そのため、ティティウス・ポード法則は、力学的な必然ではなく偶然だという考え方が主流となっている。」(2017/7, 参考資料9) 一方、著者は土星のリングや小惑星群軌道の安定性・外乱修復性を考えると何らかの必然性があると主張するものであり、相対性理論の式を用いてティティウス・ポード法則の証明を行なった。

アインシュタインの一般相対性理論(1915年に発見)は、エネルギー運動量テンソル・リッチテンソルなどを統括的に包括しているにも関わらず、惑星やダーク体のエネルギー運動量テンソルを無視し、計量テンソルのみからエネルギー式をマクロ演繹した著者の手法は、理学的に完全な証明ではないと指摘されかねない。だが、相対性理論カー・ニューマン解(1965年に発見)を利用したニュートン力学の手法によって、ティティウス・ポード法則と土星のリングに迫り、Space Fantasy 微分方程式とその近似解の結果を重要視する工学的見地からは容赦されると考える。つまり、惑星系に限定したページ5, ε 式の認知の問題であり、読者には以上のことを予め理解して、理学的に未だ不完全であろう本資料を読んでもらいたい。なお、本資料は 数式証明の詳細展開を主眼とした計算過程メモであり、総括的取り纏めは別紙の大要に譲るものである。この解法の全体概要は次の通りである。

- ① 本解析の前提条件として解析対象の空間は遅い回転の巨大質量の中心核星から十分離れており、一般の極座標が適用可能。
- ② 中心核星の質量 m , 回転 a , 電荷 e の天体定数を取り込んだカー・ニューマン解の時空方程式を利用。
- ③ 特殊相対性理論のローレンツ変換係数 γ と同種の一般相対性理論カー・ニューマン解 $\Gamma(m, a, e)$ からエネルギー方程式 $E = \Gamma(-m, a, e)$ を導入。惑星やダーク体のエネルギー運動量テンソルは無視。
- ④ $2\varepsilon = (1 - I/E^2)$ を θ で偏微分すると ε 極小は $\theta = \pi/2$ と判明、以降 回転中心核星の赤道面について解析。
- ⑤ 回転の遅いカー・ニューマン解に変分原理を適用して、時間成分を導出。
- ⑥ 近日点・遠日点距離 R で $dR = 0$ であることから、角運動量相当 J を導出。
- ⑦ R は ε と J の関数であり R を ε で偏微分した後、 J を代入して Space Fantasy 微分方程式を導出。
- ⑧ Space Fantasy 微分方程式で $d\varepsilon/dR = 0$ により、エネルギー極値となる r と ε の関係を算出。
- ⑨ 変数変換した Space Fantasy 微分方程式の近似解の積分定数式をマクローリン級数展開すると、「ポード法則」と一致。各周期に対してエネルギー的安定軌道は 1 個。(cf ⑫)
- ⑩ 中心核星の回転が速い場合、Space Fantasy 微分方程式の係数判別式の符号 \pm を反転して微分方程式を解き、土星リング群・線条軌道方程式を導出。リング群方程式の r 次数から、エネルギー的安定軌道として土星などのリング星には最大 31 個（主リング 9 個を含む）のリングが存在。

- ⑪ 微分方程式の係数判別式が 0 の場合、ファイン リング星が存在。
- ⑫ 惑星系において中心核星が回転していない場合、最大 4 個×周期差 n の楕球面内に軌道が存在。
- ⑬ 惑星系において中心核星の電荷・回転もない場合、最大 2 個の楕球面内に軌道が存在。

第 1 章 エネルギー方程式

1・1 相対性理論の時空方程式

ブラックホール脱毛定理・ブラックホール唯一性定理 において、すべての現実的なブラックホールは、カー・ニューマン解のブラックホールに落ち着くと考えられている。本解析の前提条件は、一般相対論カー・ニューマン解の前提条件のほかに次の 3 つである。

- ① 調査対象の空間座標は原点の中心核星の近傍ではなく充分離れており、相対性理論カー解に特有なボイヤー・リンクスト座標は a/ρ の 1 次オーダーで一般球座標と同等である。(参考資料 12, 13, 15)
- ② エネルギー方程式は特殊相対論の γ と同様に一般相対論カー・ニューマン解 Γ から演繹できる。
- ③ 中心核星の回転はそれほど大きくない (a/ρ の 1 次オーダー)。

特殊相対性理論で真空無垢の何もないミンコフスキー時空は次のように表される。

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (cdt)^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = \left(\frac{ds}{cdt}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dx}{cdt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{cdt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{cdt}\right)^2 = 1 - \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 - \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2$$

ここで γ は重要な $E = Mc^2$ に関わるローレンツ変換係数である。

一般相対性理論の難解なアインシュタイン方程式を厳密に解き、巨大質量星によるブラックホールの存在を理論的に証明したシュバルツシルト解は次のようになっている。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)(cdt)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)} d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

そして中心核星の回転 a を織り込んだ近似カー解は次のように表される。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right)(cdt)^2 - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho} d\rho^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2$$

$$- \left[(\rho^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2m\rho a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] d\varphi^2 - \frac{2 \cdot 2m\rho a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} cdt \cdot d\varphi$$

さらに中心核星の回転 a と電荷 e を織り込んだ近似カー・ニューマン解は次のように表される。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m\rho - e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right)(cdt)^2 - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho + e^2} d\rho^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2$$

$$- \left[(\rho^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{(2m\rho - e^2)a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] d\varphi^2 - \frac{2(2m\rho - e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} cdt \cdot d\varphi$$

これらの時空解は、アインシュタイン方程式のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu} = 0$ である。

ds を時間成分 (cdt) で割ると Γ は次のようになる。

$$\frac{1}{\Gamma^2} = \left(\frac{ds}{cdt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m\rho - e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2$$

$$- \left[(\rho^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{(2m\rho - e^2)a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 - \frac{2(2m\rho - e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)$$

1・2 エネルギー方程式の導入

特殊相対性理論のミンコフスキー時空に関わるローレンツ変換係数 $\gamma (= cdt/ds)$ は重要なエネルギー式 $E = Mc^2 = M_0 \gamma c^2$ の根原であるように、 γ の拡張である一般相対性理論の $\Gamma (= cdt/ds)$ もエネルギー式の根原である。

このことから「エネルギー極小原理」の E を標榜すると m の符号は反転して $-m$ に、 m がマイナスなので a の符号はそのまま $+a$ に、 e の符号はそのまま $+e$ にする。その方が従来の Newton 型エネルギーに合致する。つまり、ミクロ的にエネルギーは一般相対性理論のエネルギー運動量テンソルも考慮して解明されるべきだが、中心核星から十分離れた空間においてエネルギー式 E はマクロ的に $E = \Gamma(\rho, \theta, \varphi, t, -m, a, e)$ であると仮定する。(この仮定をページ5で証明)

$$\frac{1}{E^2} = \left(1 + \frac{2m\rho + e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 - \left[(\rho^2 + a^2) \sin^2 \theta - \frac{(2m\rho + e^2)a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 + \frac{2(2m\rho + e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)$$

E には支配的な質量エネルギー $M_0 c^2$ が含まれるので、これを除外し、Newton 力学のエネルギーに合わせるため、 ε を次のように定める。また、ダーク体の影響として $D(\rho, \cos 2\theta)$ を補足追加する。

$$\frac{1}{E^2} = 1 - 2\varepsilon \quad \left(\frac{dE}{E^3} = d\varepsilon \quad \text{増分 } dE = 0 \text{ ならば } d\varepsilon = 0 \text{ である} \right)$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-2\varepsilon}} = 1 + \varepsilon - \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{5}{2}\varepsilon^3 - \dots$$

$$-2\varepsilon = \frac{2m\rho + e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 - \left[(\rho^2 + a^2) \sin^2 \theta - \frac{(2m\rho + e^2)a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 + \frac{2(2m\rho + e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) + D(\rho, \cos 2\theta)$$

エネルギー $\varepsilon(\rho, \theta, \varphi, t)$ が極小となる座標を求めるため、 ε を夫々 (ρ, θ, φ) で偏微分する。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = 0 \quad \text{について}$$

$$\begin{aligned} & \frac{+(2m\rho + e^2)2a^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} + \frac{2a^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 + 2a^2 \cos \theta \cdot \sin \theta \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 \\ & - \left[(\rho^2 + a^2) 2\sin \theta \cdot \cos \theta - \frac{(2m\rho + e^2)4a^2 \sin^3 \theta \cdot \cos \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{(2m\rho + e^2)a^2 \sin^4 \theta \cdot 2a^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 \\ & + \left[\frac{2(2m\rho + e^2)2a \sin \theta \cdot \cos \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} + \frac{2(2m\rho + e^2)a \sin^2 \theta \cdot 2a^2 \cos \theta \cdot \sin \theta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) - \frac{\partial D(\rho, \theta)}{\partial \theta} 2\sin 2\theta = 0 \end{aligned}$$

上記の各項に $2\sin \theta \cdot \cos \theta$ が含まれるので、 $\sin 2\theta$ でまとめると、次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{(2m\rho + e^2)a^2}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} + \frac{a^2}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 + a^2 \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 \\ & - \left[(\rho^2 + a^2) - \frac{(2m\rho + e^2)2a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{(2m\rho + e^2)a^4 \sin^4 \theta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 \\ & + \left[\frac{2(2m\rho + e^2)a}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} + \frac{2(2m\rho + e^2)a^3 \sin^2 \theta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) - 2 \frac{\partial D(\rho, \theta)}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \sin 2\theta = 0$$

これにより $\sin 2\theta = 0$ 従って $2\theta = 0, \pi, 2\pi$ となる。

$$(\theta = 0) \quad 2\varepsilon_M = -\frac{2m\rho + e^2}{\rho^2 + a^2} + \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 + (\rho^2 + a^2) \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 - D(\rho, 1) \quad (\varepsilon : \text{極大})$$

$$(\theta = \frac{\pi}{2}) \quad 2\varepsilon_m = -\frac{2m\rho + e^2}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 \\ + \left[(\rho^2 + a^2) - \frac{(2m\rho + e^2)a^2}{\rho^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 - \frac{2(2m\rho + e^2)a}{\rho^2} \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) - D(\rho, -1) \quad (\varepsilon : \text{極小})$$

つまり、遅い回転の中心核星の回転軸の赤道面 ($\theta = \pi/2$) において ε は極小となり、惑星はエネルギー的に安定な赤道面に集まることになる。この結論は渦巻銀河の周辺部ディスク (円盤) について成立するが、中央部の膨らんだ部分バルジについては成立しない。バルジのように巨大中心核星から十分離れてない空間は、解析の前提条件から外れており、本解析が適用できないことを意味している。

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = 0$ について

$$\frac{2m}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{(2m\rho + e^2)2\rho}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} - \left[\frac{2\rho}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} - \frac{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)(2\rho + 2m)}{(\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2)^2} \right] \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 \\ - 2\rho \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 - \left[2\rho \sin^2 \theta - \frac{2ma^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} + \frac{(2m\rho + e^2)a^2 \sin^4 \theta \cdot 2\rho}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 \\ + \left[\frac{2 \cdot 2ma \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{2(2m\rho + e^2)a \sin^2 \theta \cdot 2\rho}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) + \frac{\partial D(\rho, \cos 2\theta)}{\partial \rho} = 0$$

特に $\theta = \pi/2$ の赤道面において

$$\frac{2m}{\rho^2} - \frac{2(2m\rho + e^2)}{\rho^3} - \left[\frac{2\rho}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} - \frac{2\rho^2(\rho + m)}{(\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2)^2} \right] \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 \\ - \left[2\rho - \frac{2ma^2}{\rho^2} + \frac{2(2m\rho + e^2)a^2}{\rho^3} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 + \left[\frac{4ma}{\rho^2} - \frac{4(2m\rho + e^2)a}{\rho^3} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) + \frac{\partial D(\rho, -1)}{\partial \rho} = 0$$

ρ についての特異性は不明である。

$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} = 0$ については、恒常的に成立している。

再び、近似カー・ニューマン解は次のようになっている。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m\rho - e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) (cdt)^2 - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho + e^2} d\rho^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ - \left[(\rho^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{(2m\rho - e^2)a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] d\varphi^2 - \frac{2(2m\rho - e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} cdt \cdot d\varphi$$

惑星系の中心核星の回転が遅いとして上式を a/ρ の 1 次オーダーで展開する。

$$\left(1 - \frac{2m\rho - e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \doteq \left\{ 1 - \frac{2m\rho - e^2}{\rho^2} \right\} \\ \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho + e^2} = \frac{1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \theta}{1 + \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \doteq \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}}$$

$$\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta = \rho^2 \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \theta \right) \doteq \rho^2$$

$$(\rho^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{(2m\rho - e^2)a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} = \rho^2 \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{a^2}{\rho^2} \cdot \frac{(2m\rho - e^2) \sin^4 \theta}{\left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right) \cos^2 \theta} \doteq \rho^2 \sin^2 \theta$$

$$\frac{2(2m\rho - e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} = \frac{a}{\rho} \cdot \frac{2 \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta}{\left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2 \theta \right)} \doteq \frac{2a \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta}{\rho}$$

従って、近似カー・ニューマン解は a/ρ の 1 次オーダーで次のように表わされる。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) (cdt)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 - 2a \left(\frac{2m}{\rho} - \frac{e^2}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \cdot cdt \cdot d\varphi$$

$$\frac{1}{\Gamma^2} = \left(\frac{ds}{cdt} \right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) - \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left(\frac{d\rho}{cdt} \right)^2 - \rho^2 \left(\frac{d\theta}{cdt} \right)^2 - \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)^2 - 2a \left(\frac{2m}{\rho} - \frac{e^2}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)$$

以降、エネルギー的に安定な $\theta = \pi/2$ に固定して検討を進める。すると Γ^2 は次のように表される。

$$\frac{1}{\Gamma^2} = \left(\frac{ds}{cdt} \right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) - \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left(\frac{d\rho}{cdt} \right)^2 - \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)^2 - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)$$

$$\Gamma \doteq 1 + \frac{m}{\rho} - \frac{e^2}{2\rho^2} + \frac{1}{2 \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right)} \left(\frac{d\rho}{cdt} \right)^2 + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)^2 + \frac{2a}{\rho} \left(m - \frac{e^2}{2\rho} \right) \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)$$

$E = \Gamma(\rho, \theta, \varphi, t, -m, a, e)$ を出すと、半径方向運動エネルギーが ρ の補正を受けている。

$$\frac{1}{E^2} = 1 - 2\varepsilon = 1 + \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} - \frac{1}{1 + \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left(\frac{d\rho}{cdt} \right)^2 - \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)^2 + \frac{4a}{\rho} \left(m + \frac{e^2}{2\rho} \right) \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)$$

$$0 = 2\varepsilon + \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} - \frac{1}{1 + \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left(\frac{d\rho}{cdt} \right)^2 - \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)^2 + \frac{4a}{\rho} \left(m + \frac{e^2}{2\rho} \right) \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)$$

上式はエネルギーの 1 次結合であるので、 $1/E^2$ はエネルギー式そのものであると証明された。

1・3 変分原理による時間成分

惑星系の中心核星の回転が遅い場合の近似カー・ニューマン解は、次のように表すことができた。

$$\left(\frac{ds}{ds} \right)^2 = 1 = \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 - \rho^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{cdt}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)$$

これを変分問題として考えると、次のようになる。(参考資料 13)

$$\delta \int \left[\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 - \rho^2 \left\{ \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right\} - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{cdt}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right] ds = 0$$

これをオイラー・ラグランジュ方程式に入れることで、時間成分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial \left(\frac{cdt}{ds} \right)} \left[\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right)^2 - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) \right] \\ = \frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) 2 \left(\frac{cdt}{ds} \right) - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right] \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) 2 \left(\frac{cdt}{ds} \right) - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right] = 0$$

オイラー・ラグランジュ
方程式

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial E}{\partial \left(\frac{dx_k}{ds} \right)} \right) - \frac{\partial E}{\partial x_k} = 0$$

θ 成分に対しては次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial \left(\frac{d\theta}{ds} \right)} \left[-\rho^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{cdt}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right] \\ = \frac{d}{ds} \left[-2\rho^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \right] + 2\rho^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \left(\frac{cdt}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \end{aligned}$$

よって θ 成分での方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{ds} \left[2\rho^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \right] - 2\rho^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{4a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta \left(\frac{cdt}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = 0$$

φ 成分に対しては、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \cdot \frac{\partial}{\partial \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)} \left[-\rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{cdt}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right] \\ = \frac{d}{ds} \left[-2\rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) \right] \end{aligned}$$

よって、 φ 成分での方程式は次のようになる。

$$\frac{d}{ds} \left[-2\rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) \right] = 0$$

特に、エネルギー的に安定な回転中心核星の赤道面 ($\theta = \pi/2$) では、次のようになる。

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) - \frac{a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right] = 0 & \text{時間成分} \\ \frac{d}{ds} \left[\rho^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) + \frac{a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) \right] = 0 & \varphi \text{ 成分} \quad (\theta \text{ 成分については } 0) \end{cases}$$

上式を ds で積分すると k 、 h を積分定数として次のように表される。

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) - \left(\frac{2ma}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = k \\ \left(\frac{2ma}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) + \rho^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = h \end{aligned}$$

この連立方程式により $\frac{cdt}{ds}$ 、 $\frac{d\varphi}{ds}$ を求めると次のようになる。

$$\frac{cdt}{ds} = \frac{k\rho^2 + h\left(\frac{2ma}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2}\right)}{\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}\right)\rho^2 + \left(\frac{2ma}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2}\right)\left(\frac{2ma}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2}\right)}$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}\right) + k\left(\frac{ae^2}{\rho^2} - \frac{2ma}{\rho}\right)}{\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}\right)\rho^2 + \left(\frac{2ma}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2}\right)\left(\frac{2ma}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2}\right)}$$

これにより

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)}{\left(\frac{dt}{ds}\right)} = \frac{h\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}\right) + k\left(\frac{ae^2}{\rho^2} - \frac{2am}{\rho}\right)}{k\rho^2 + h\left(\frac{2am}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2}\right)} \cdot c = \frac{\frac{h}{k}\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}\right) + \frac{a}{\rho}\left(\frac{e^2}{\rho} - 2m\right)}{\rho^2 + \frac{h}{k}\left(\frac{2am}{\rho} - \frac{ae^2}{\rho^2}\right)} \cdot c \\ &= \frac{J\left(\rho - 2m + \frac{e^2}{\rho}\right) + a\left(\frac{e^2}{\rho} - 2m\right)}{\rho^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{\rho}\right)} \cdot c \quad J = \frac{h}{k} \text{ とする。} \end{aligned}$$

これから、角運動量相当の J を出すと次のようになる。

$$\left[\rho^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{\rho}\right)\right]\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) = J\left(\rho - 2m + \frac{e^2}{\rho}\right) + a\left(\frac{e^2}{\rho} - 2m\right)$$

$$J\left[a\left(2m - \frac{e^2}{\rho}\right)\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) - \left(\rho - 2m + \frac{e^2}{\rho}\right)\right] = a\left(\frac{e^2}{\rho} - 2m\right) - \rho^3\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)$$

$$J = \frac{\rho^3\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) - a\left(\frac{e^2}{\rho} - 2m\right)}{\left(\rho - 2m + \frac{e^2}{\rho}\right) - a\left(2m - \frac{e^2}{\rho}\right)\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)} \quad \begin{array}{l} J : \text{角運動量相当} \\ \text{(相対論 Carter constant の一種)} \end{array}$$

ここでは時空の関係が重要であり、角運動量相当の J において m 、 a 、 e^2 の符号は反転を考えなくて良い。従って、時間成分 cdt と角運動量相当 J の関係は次のようになる。

$$\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) = \frac{J\left(\rho - 2m + \frac{e^2}{\rho}\right) + a\left(\frac{e^2}{\rho} - 2m\right)}{\rho^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{\rho}\right)}$$

これからエネルギー式と時空の関係式を併合するために、 J から出てくる $d\varphi/cdt$ をエネルギー式に代入する。ここで距離記号の説明をしておく。

ρ : 3次元又は2次元座標における任意の軌道距離

R : 中心核星の赤道面における遠日点・近日点距離

r : 赤道面におけるエネルギー的安定の遠日点・近日点距離

1・4 角運動量相当の導出

エネルギー式は次のように表すことができた。

$$0 = 2\varepsilon + \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} - \frac{1}{1 + \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}}\left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 + \frac{4a}{\rho}\left(m + \frac{e^2}{2\rho}\right)\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)$$

遠日点・近日点距離 R において ρ の増分 $d\rho=0$ であるので、エネルギー式は次のようになる。

$$0 = 2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} - R^2\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 + \frac{4a}{R}\left(m + \frac{e^2}{2R}\right)\left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)$$

角運動量相当から求められた $d\varphi/cdt$ をエネルギー式に代入すると次のようになる。

$$0 = 2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} - R^2 \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right]^2$$

$$+ \frac{4a}{R} \left(m + \frac{e^2}{2R} \right) \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right]$$

これから J を出す。上式は $[J \dots]$, つまり $(d\varphi/cdt)$ の2次方程式になっているので、

$$\left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) + R^3} \right] = \frac{2a}{R^3} \left(m + \frac{e^2}{2R} \right) \pm \sqrt{\frac{4a^2}{R^6} \left(m + \frac{e^2}{2R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} \right)}$$

$$= \frac{1}{R^3} \left[2a \left(m + \frac{e^2}{2R} \right) \pm \sqrt{4a^2 \left(m + \frac{e^2}{2R} \right)^2 + R^4 \left(2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} \right)} \right]$$

$$= L \text{ と置くと}$$

$$J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right) = L \left[Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) + R^3 \right]$$

$$J \left[R - 2m + \frac{e^2}{R} - La \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right] = LR^3 - a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)$$

$$J = \frac{LR^3 - a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R - 2m + \frac{e^2}{R} - La \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} = \frac{LR^3 + a \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)}{R - \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) (1 + La)} \quad L \text{ を代入すると}$$

$$= \frac{2a \left(m + \frac{e^2}{2R} \right) \pm \sqrt{4a^2 \left(m + \frac{e^2}{2R} \right)^2 + R^4 \left(2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} \right)} + a \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)}{R - \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \left\{ 1 + \frac{a}{R^3} \left[2a \left(m + \frac{e^2}{2R} \right) \pm \sqrt{4a^2 \left(m + \frac{e^2}{2R} \right)^2 + R^4 \left(2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} \right)} \right] \right\}}$$

$$= \frac{4am \pm \sqrt{4a^2 \left(m^2 + \frac{me^2}{R} + \frac{e^4}{4R^2} \right) + R^2(2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2)}}{R - \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \left\{ 1 + \frac{a}{R^3} \left[2a \left(m + \frac{e^2}{2R} \right) \pm \sqrt{4a^2 \left(m^2 + \frac{me^2}{R} + \frac{e^4}{4R^2} \right) + R^2(2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2)} \right] \right\}}$$

R の2次オーダーまでを採用すると、 J は次のようになる。

$$J = \frac{4am \pm R\sqrt{2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2}}{R - \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \left\{ 1 + \frac{a}{R^3} \left(2am + \frac{ae^2}{R} \right) \pm \frac{a}{R^2} \sqrt{2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2} \right\}}$$

$$= \frac{4am \pm R\sqrt{2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2}}{R^3 - \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \{ R^2 \pm a\sqrt{2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2} \}} R^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4am + R\delta\sqrt{2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2}}{R^3 - 2mR^2 + e^2R - a\left(2m - \frac{e^2}{R}\right)\delta\sqrt{2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2}} R^2 \\
&= \frac{4am + R\delta\sqrt{R\left(2\varepsilon R + 2m + \frac{e^2}{R}\right)}}{R^2\left(R - 2m + \frac{e^2}{R}\right) - a\left(2m - \frac{e^2}{R}\right)\delta\sqrt{R\left(2\varepsilon R + 2m + \frac{e^2}{R}\right)}} R^2 \\
&= \frac{4am + R\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}} R^2
\end{aligned}$$

ここで、 $\delta = \pm 1$ $C = e^2/R$ としている。 δ は軌道と中心核星の回転方向に関わるものである。
(微分・積分する場合、 C は必ず e^2/R に戻すこと。)

第2章 Space Fantasy (宙風流) 微分方程式

2・1 Space Fantasy 微分方程式の導出

遠日点・近日点距離 R における R , ε , J の関係は次のように表すことができ、Kepler-Newton 式 $2\varepsilon R^2 + 2mR - J^2 = 0$ より遥かに複雑である。

$$\begin{aligned}
0 = 2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} - R^2 &\left[\frac{J\left(R - 2m + \frac{e^2}{R}\right) + a\left(\frac{e^2}{R} - 2m\right)}{R^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{R}\right)} \right]^2 \\
&+ \frac{4a}{R}\left(m + \frac{e^2}{2R}\right) \left[\frac{J\left(R - 2m + \frac{e^2}{R}\right) + a\left(\frac{e^2}{R} - 2m\right)}{R^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{R}\right)} \right]
\end{aligned}$$

$f(R, \varepsilon, J) = 0$ において惑星軌道 R はエネルギー ε と角運動量相当 J から決まるので、 R は ε と J の関数であり、 $R = R(\varepsilon, J)$ となる。ここで単なる数学的テクニックとして R を ε で偏微分 $\partial R/\partial \varepsilon$ する。全体を偏微分するに先立ち、 $\partial[J(R \dots)]/\partial \varepsilon$ を計算しておく。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{J\left(R - 2m + \frac{e^2}{R}\right) + a\left(\frac{e^2}{R} - 2m\right)}{R^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{R}\right)} \right] \\
&= \left[\frac{J\left(1 - \frac{e^2}{R}\right) - \frac{ae^2}{R^2}}{R^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{R}\right)} - \frac{\left[J\left(R - 2m + \frac{e^2}{R}\right) + a\left(\frac{e^2}{R} - 2m\right) \right] \left[3R^2 + Ja\frac{e^2}{R^2} \right]}{\left[R^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{R}\right) \right]^2} \right] \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\
&= \frac{\left[R^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{R}\right) \right] \left[J\left(1 - \frac{e^2}{R^2}\right) - \frac{ae^2}{R^2} \right] - \left[3R^2 + Ja\frac{e^2}{R^2} \right] \left[J\left(R - 2m + \frac{e^2}{R}\right) + a\left(\frac{e^2}{R} - 2m\right) \right]}{\left[R^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{R}\right) \right]^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\
&= \frac{\left(\begin{aligned} &J(R^3 - Re^2) - ae^2R + J^2a\left(2m - \frac{2me^2}{R^2} - \frac{e^2}{R} + \frac{e^4}{R^3}\right) - Ja^2e^2\left(\frac{2m}{R^2} - \frac{e^2}{R^3}\right) \\ &- \left[J(3R^3 - 6mR^2 + 3e^2R) + 3ae^2R - 6amR^2 + J^2a\left(\frac{e^2}{R} - \frac{2me^2}{R^2} + \frac{e^4}{R^3}\right) + Ja^2\left(\frac{e^4}{R^3} - \frac{2me^2}{R^2}\right) \right] \end{aligned} \right)}{\left[R^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{R}\right) \right]^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\begin{aligned} &J^2 a \left(2m - \frac{2me^2}{R^2} - \frac{e^2}{R} + \frac{e^4}{R^3} - \frac{e^2}{R} + \frac{2me^2}{R^2} - \frac{e^4}{R^3} \right) \\ &+ J \left(R^3 - Re^2 - \frac{2ma^2e^2}{R^2} + \frac{a^2e^4}{R^3} - 3R^3 + 6mR^2 - 3e^2R - \frac{a^2e^4}{R^3} + \frac{2a^2me^2}{R^2} \right) \\ &- ae^2R - 3ae^2R + 6amR^2 \end{aligned} \right) \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}}{\left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]^2} \\
&= \frac{\left[J^2 a \left(2m - \frac{2e^2}{R} \right) + J(-2R^3 - 4e^2R + 6mR^2) - 4ae^2R + 6maR^2 \right] \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}}{\left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]^2} \\
&= \frac{J^2 a \left(m - \frac{e^2}{R} \right) - JR(R^2 - 3mR + 2e^2) + aR(3mR - 2e^2)}{\left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]^2} \cdot 2 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}
\end{aligned}$$

前記の $R(\varepsilon, J) = 0$ を ε で偏微分すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
-2 &= \left\{ \frac{-2m}{R^2} - \frac{2e^2}{R^3} - 2R \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right]^2 \right\} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\
&\quad - 2R^2 \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{J \dots}{R^3 + \dots} \right] \\
&\quad + \left\{ 4a \left(\frac{-m}{R^2} - \frac{e^2}{R^3} \right) \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right] \right\} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{4a}{R} \left(m + \frac{e^2}{2R} \right) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{J \dots}{R^3 + \dots} \right] \\
1 &= \left\{ \frac{1}{R^2} \left(m + \frac{e^2}{R} \right) + R \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2a}{R^2} \left(m + \frac{e^2}{R} \right) \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right] \right\} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\
&\quad + \left\{ R^2 \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right] - \frac{2a}{R} \left(m + \frac{e^2}{2R} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[\frac{J \dots}{R^3 + \dots} \right]
\end{aligned}$$

↑ 代入する。

両辺に $[R^3 + Ja(2m - e^2/R)]^2$ を掛け、 $\partial R/\partial \varepsilon$ の逆数をとると、待望の $\partial \varepsilon/\partial R$ が出てくる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]^2 &= \frac{1}{R^2} \left(m + \frac{e^2}{R} \right) \left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]^2 + R \left[J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right) \right]^2 \\
&\quad + \frac{2a}{R^2} \left(m + \frac{e^2}{R} \right) \left[J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right) \right] \left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ R^2 \left[\frac{J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right] - \frac{2am}{R} - \frac{ae^2}{R^2} \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ J^2 a \left(m - \frac{e^2}{R} \right) - JR(R^2 - 3mR + 2e^2) + aR(3mR - 2e^2) \right\} \cdot 2 \\
= & \frac{1}{R^2} \left(m + \frac{e^2}{R} \right) \left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]^2 + \left[J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right) \right] \times \\
& \quad \times \left\{ J(R^2 - 2mR + e^2) + ae^2 - 2amR + \frac{2a}{R^2} \left(m + \frac{e^2}{R} \right) \left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right] \right\} \\
& \quad + \left\{ \frac{JR^4 \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + aR^4 \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right) - 2amR^4 - J2a^2mR \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) - ae^2R^3 - Ja^2e^2 \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)}{R^2 \left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]} \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ J^2 a \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) - JR(R^2 - 3mR + 2e^2) + aR(3mR - 2e^2) \right\} \cdot 2 \\
= & \frac{1}{R^2} \left(m + \frac{e^2}{R} \right) \left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]^2 + \left[J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left(\frac{e^2}{R} - 2m \right) \right] \times \\
& \quad \times \left\{ J \left[R^2 - 2mR + e^2 + \left(\frac{2am}{R^2} + \frac{2ae^2}{R^3} \right) a \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right] + ae^2 - \cancel{2amR} + \cancel{2amR} + 2ae^2 \right\} \\
& \quad + \left\{ J \left[R^5 - 2mR^4 + e^2R^3 - \cancel{4a^2m^2R} + \cancel{2a^2me^2} - \cancel{2a^2me^2} + \frac{a^2e^4}{R} \right] + \cancel{ae^2R^3} - 2amR^4 - 2amR^4 - \cancel{ae^2R^3} \right\} \times \\
& \quad \times 2 \times \frac{J^2 a \left(m - \frac{e^2}{R} \right) - JR(R^2 - 3mR + 2e^2) + aR(3mR - 2e^2)}{R^5 + JaR^2 \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)} \\
= & \frac{1}{R^2} \left(m + \frac{e^2}{R} \right) \left[R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right) \right]^2 + \left[J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) - 2am + \frac{ae^2}{R} \right] \left[J(R^2 - 2mR + e^2) + 3ae^2 \right] \\
& \quad + \frac{2R^2 \left[J \left(R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) - 4am \right] \left[J^2 a \left(m - \frac{e^2}{R} \right) - JR^2 \left(R - 3mR + \frac{2e^2}{R} \right) + aR^2 \left(3m - \frac{2e^2}{R} \right) \right]}{R^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{R} \right)}
\end{aligned}$$

$C = e^2/R$ と簡単に記述する。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} [R^3 + Ja(2m - C)]^2 \\
& = \frac{(m + C)[R^3 + Ja(2m - C)]^2}{R^2} + \frac{[J(R - 2m + C) - 2am + aC] [J(R - 2m + C) + 3aC] \cdot R}{1} \\
& \quad + \frac{2R^2 [J(R - 2m + C) - 4am] [J^2 a(m - C) - JR^2(R - 3m + 2C) + aR^2(3m - 2C)]}{R^3 + Ja(2m - C)}
\end{aligned}$$

次の J を上式に代入し、 R の 2 次オーダーまで採用する。

$$J = \frac{4am + R\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}} R^2$$

上記の微分方程式の[左辺]の係数

$$\begin{aligned}
[R^3 + Ja(2m - C)]^2 &= \left[R^3 + \frac{4am + R\delta\sqrt{\quad}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}} R^2 a(2m - C) \right]^2 \\
&= R^4 \frac{[R^3(R - 2m + C) - Ra(2m - C)\delta\sqrt{\quad} + (4am + R\delta\sqrt{\quad})a(2m - C)]^2}{[R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}]^2} \\
&= R^4 \frac{[R^3(R - 2m + C) - \cancel{Ra(2m - C)\delta\sqrt{\quad}} + 4a^2m\cancel{(2m - C)} + a\cancel{(2m - C)}R\delta\sqrt{\quad}]^2}{[R^2 \dots]^2} \\
&= R^{10} \frac{(R^2 - 4mR + 2CR - \cancel{4mC} + 4m^2 + \cancel{C^2})}{[R^2 \dots]^2} \\
&= \frac{R^{10}(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)}{[R^3 - R^2(2m - C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\epsilon R + 2m + C)}]^2}
\end{aligned}$$

[右辺]の第1項

$$\begin{aligned}
\frac{(m + C)[R^3 + Ja(2m - C)]^2}{R^2} &= \frac{(m + C)}{R^2} \left[R^3 + \frac{4am + R\delta\sqrt{\quad}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}} \cdot R^2 a(2m - C) \right]^2 \\
&= \frac{(m + C)}{R^2} \cdot \frac{R^{10}(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)}{[R^3 - R^2 \dots]^2} \\
&= \frac{R^8(mR^2 + CR^2 - 4m^2R - 4CmR + 2CmR + \cancel{2C^2R} + 4m^3 + \cancel{4Cm^2})}{[R^3 - R^2 \dots]^2} \\
&= \frac{R^8(mR^2 + CR^2 - 4m^2R - 2CmR + 4m^3)}{[R^3 - R^2(2m - C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\epsilon R + 2m + C)}]^2}
\end{aligned}$$

[右辺]第2項の左

$$\begin{aligned}
[J(R - 2m + C) - 2am + aC] &= \frac{[4am + R\delta\sqrt{\quad}]}{[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}]} \cdot R^2(R - 2m + C) - 2am + aC \\
&= \frac{\left[R^2 [4am + R\delta\sqrt{\quad}] (R - 2m + C) - 2am [R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}] \right. \\
&\quad \left. + aC [R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}] \right]}{[R^3 - R^2 \dots]^1} \\
&= \frac{\left[\begin{aligned} &4amR^3 - 8am^2R^2 + \cancel{4aCmR^2} + (R - 2m + C)R^3\delta\sqrt{\quad} - 2amR^3 + 4am^2R^2 \\ &\cancel{-2aCmR^2} + 2a^2m\cancel{(2m - C)}\delta\sqrt{\quad} + aCR^3 - \cancel{2aCmR^2} + aC^2R^2 - \cancel{a^2C(2m - C)}\delta\sqrt{\quad} \end{aligned} \right]}{[R^3 - R^2 \dots]^1} \\
&= \frac{R^2 [2amR + aCR - 4am^2 + (R - 2m + C)R\delta\sqrt{R(2\epsilon R + 2m + C)}]}{R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\epsilon R + 2m + C)}}
\end{aligned}$$

[右辺]第2項の右

$$\begin{aligned}
[J(R - 2m + C) + 3aC] &= \frac{[4am + R\delta\sqrt{\quad}]}{[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}]} \cdot R^2(R - 2m + C) + 3aC \\
&= \frac{R^2 [4am + R\delta\sqrt{\quad}] (R - 2m + C) + 3aC [R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}]}{[R^3 - R^2 \dots]^1} \\
&= \frac{4amR^3 - 8am^2R^2 + 4aCmR^2 + (R - 2m + C)R^3\delta\sqrt{\quad} + 3aCR^3 - 6aCmR^2 + 3aC^2R^2 - 3a^2C(2m - C)\delta\sqrt{\quad}}{[R^3 - R^2 \dots]^1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{R^2 [4amR + 3aCR - 8am^2 - 2aCm + R(R - 2m + C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}]}{R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}$$

[右辺]の第2項

$$\begin{aligned} & [J(R - 2m + C) - 2am + aC] \cdot [J(R - 2m + C) + 3aC] \cdot R \\ &= \frac{R^2 [2amR + aCR - 4am^2 + (R - 2m + C)R\delta\sqrt{\quad}]}{[R^3 - R^2 \dots]} \times \\ & \times \frac{R^2 [4amR + 3aCR - 8am^2 - 2aCm + (R - 2m + C)R\delta\sqrt{\quad}]}{[R^3 - R^2 \dots]} \cdot R \\ &= \frac{\left(\begin{aligned} & \cancel{8a^2m^2R^2} + \cancel{6a^2CmR^2} - \cancel{16a^2m^3R} - \cancel{4a^2Cm^2R} + 2amR^2(R - 2m + C)\delta\sqrt{\quad} \\ & + \cancel{4a^2CmR^2} + \cancel{3a^2C^2R^2} - \cancel{8a^2Cm^2R} - \cancel{2a^2C^2mR} + aCR^2(R - 2m + C)\delta\sqrt{\quad} \\ & - \cancel{16a^2m^3R} - \cancel{12a^2Cm^2R} + \cancel{32a^2m^4} + \cancel{8a^2Cm^2} - 4am^2R(R - 2m + C)\delta\sqrt{\quad} \\ & + (R - 2m + C)^2R^2 \cdot R(2\varepsilon R + 2m + C) + (4amR + 3aCR - 8am^2 - 2aCm)(R - 2m + C)R\delta\sqrt{\quad} \end{aligned} \right)}{[R^3 - R^2 \dots]^2} \cdot R^5 \\ &= \left(\frac{R^3(R - 2m + C)^2(2\varepsilon R + 2m + C) + aR(R - 2m + C) \times}{[R^3 - R^2 \dots]^2} \right) \cdot R^5 \\ & \times [2mR + CR - 4m^2 + 4mR + 3CR - 8m^2 - 2Cm]\delta\sqrt{\quad} \\ &= \left(\frac{R^3(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)(2\varepsilon R + 2m + C)}{[R^3 - R^2 \dots]^2} \right) \cdot R^5 \\ & + aR(R - 2m + C)(6mR + 4CR - 12m^2 - 2Cm)\delta\sqrt{\quad} \\ &= \left(\frac{\begin{aligned} & R^3(2mR^2 - 8m^2R + \cancel{4CmR} + 8m^3 + CR^2 - \cancel{4CmR} + \cancel{2C^2R} + \cancel{4Cm^2}) \\ & + \varepsilon 2R^4(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) \\ & + aR[6mR^2 + 4CR^2 - 12m^2R - 2CmR - 12m^2R - 8CmR + 24m^3 + \cancel{4Cm^2} + 6CmR \\ & + \cancel{4C^2R} - \cancel{12Cm^2} - \cancel{2C^2m}]\delta\sqrt{\quad} \end{aligned} \right)}{[R^3 - R^2 \dots]^2} \cdot R^5 \\ &= \left(\frac{\begin{aligned} & R^2(2mR^2 + CR^2 - 8m^2R + 8m^3) + \varepsilon \cdot 2R^3(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) \\ & + 2a(3mR^2 + 2CR^2 - 12m^2R - 2CmR + 12m^3)\delta\sqrt{\quad} \end{aligned} \right)}{[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}]^2} \cdot R^6 \end{aligned}$$

[右辺]第3項の左

$$\begin{aligned} & \frac{2R^2[J(R - 2m + C) - 4am]}{R^3 + Ja(2m - C)} = \frac{\left[\frac{4am + R\delta\sqrt{\quad}}{R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}} \cdot R^2(R - 2m + C) - 4am \right] 2R^2}{\left[R^3 + \frac{4am + R\delta\sqrt{\quad}}{R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}} R^2 \cdot a(2m - C) \right]} \\ &= \frac{[4am + R\delta\sqrt{\quad}]R^2(R - 2m + C) - 4am(R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad})}{R[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{\quad}] + [4am + R\delta\sqrt{\quad}]a(2m - C)} \cdot 2 \\ &= \frac{4amR^2(\cancel{R - 2m + C}) - 4am(\cancel{R^3 - 2mR^2 + CR^2}) + R^3(R - 2m + C)\delta\sqrt{\quad} + 4a^2m(2m - C)\delta\sqrt{\quad}}{R(R^3 - 2mR^2 + CR^2) + 4am \cdot a(\cancel{2m - C}) - Ra(\cancel{2m - C})\delta\sqrt{\quad} + Ra(\cancel{2m - C})\delta\sqrt{\quad}} \cdot 2 \\ &= \frac{2R^3(R - 2m + C)\delta\sqrt{\quad}}{R(R^3 - 2mR^2 + CR^2)} \\ &= 2\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \end{aligned}$$

[右辺]第3項の右

$$\begin{aligned}
& J^2 a(m-C) - JR^2(R-3m+2C) + aR^2(3m-2C) \\
&= \left[\frac{4am + R\delta\sqrt{\quad}}{R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m-C)\delta\sqrt{\quad}} \cdot R^2 \right]^2 a(2m-C) \\
&\quad - \left[\frac{4am + R\delta\sqrt{\quad}}{R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m-C)\delta\sqrt{\quad}} \cdot R^2 \right] R^2(R-3m+2C) + aR^2(3m-2C) \\
&= \left[\begin{aligned} & \left[4am + R\delta\sqrt{\quad} \right]^2 R^4 a(m-C) - \left[4am + R\delta\sqrt{\quad} \right] R^4 (R-3m+2C) \times \\ & \times \left[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m-C)\delta\sqrt{\quad} \right] \\ & + a(3m-2C)R^2 \left[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m-C)\delta\sqrt{\quad} \right]^2 \end{aligned} \right] \\
&\quad \left[R^3 - 2mR^2 \dots \right]^2 \\
&= \left[\begin{aligned} & \left[16a^2 m^2 + R^2 R(2\epsilon R + 2m + C) + 8amR\delta\sqrt{\quad} \right] R^4 a(m-C) \\ & - R^4 (R-3m+2C)4am(R^3 - 2mR^2 + CR^2) + R^4 (R-3m+2C)a(2m-C)R \cdot R(2\epsilon R + 2m + C) \\ & - R^4 (R-3m+2C)(R^3 - 2mR^2 + CR^2)R\delta\sqrt{\quad} + R^4 (R-3m+2C)4ama(2m-C)\delta\sqrt{\quad} \\ & + a(3m-2C)R^2 [R^6 + 4m^2 R^4 + C^2 R^4 + a^2(2m-C)^2 R(2\epsilon R + 2m + C) \\ & - 4mR^5 + 2CR^5 - 2a(2m-C)R^3\delta\sqrt{\quad} - 4mCR^4 + 4ma(2m-C)R^2\delta\sqrt{\quad} - 2aC(2m-C)R^2\delta\sqrt{\quad}] \end{aligned} \right] \\
&\quad \left[R^3 - 2mR^2 \dots \right]^2 \\
&= \left[\begin{aligned} & R^7(2\epsilon R + 2m + C)a(m-C) - R^6(R-3m+2C)(R-2m+C)4am \\ & + R^6(R-3m+2C)(2\epsilon R + 2m + C)a(2m-C) \\ & - R^7(R-3m+2C)(R-2m+C)\delta\sqrt{\quad} + a(3m-2C)R^6(R^2 + 4m^2 - 4mR + 2CR) \end{aligned} \right] \\
&\quad \left[R^3 - 2mR^2 \dots \right]^2 \\
&= R^6 \left[\begin{aligned} & \epsilon 2R^2 a(m-C) + R(2m+C)a(m-C) + (R-3m+2C)(-4amR + 12am^2 - 4aCm) \\ & + \epsilon 2aR(R-3m+2C)(2m-C) + a(3m-2C)(R^2 + 4m^2 - 4mR + 2CR) \\ & - R(R-3m+2C)(R-2m+C)\delta\sqrt{\quad} \end{aligned} \right] \\
&\quad \left[R^3 - 2mR^2 \dots \right]^2 \\
&= R^6 \left[\begin{aligned} & \epsilon [2aR(mR - CR + 2mR - CR - 6m^2 + 3Cm + 4Cm - 2C^2)] + 2am^2R - aCmR - aC^2R \\ & - 4amR^2 + 12am^2R - 4aCmR + 12am^2R - 36am^3 + 12aCm^2 - 8aCmR + 24aCm^2 - 8aC^2m \\ & + 3amR^2 + 12am^3 - 12am^2R + 6aCmR - 2aCR^2 - 8aCm^2 + 8aCmR - 4aC^2R \\ & - R(R^2 - 2mR + CR - 3mR + 6m^2 - 3Cm + 2CR - 4Cm + 2C^2)\delta\sqrt{\quad} \end{aligned} \right] \\
&\quad \left[R^3 - 2mR^2 \dots \right]^2 \\
&= R^6 \left[\begin{aligned} & \epsilon \cdot 2aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm) - amR^2 - 2aCR^2 + aCmR + 14am^2R - 5aC^2R - 24am^3 \\ & - R(R^2 - 5mR + 3CR + 6m^2)\delta\sqrt{\quad} \end{aligned} \right] \\
&\quad \left[R^3 - 2mR^2 \dots \right]^2 \\
&= R^6 \left[\begin{aligned} & -amR^2 - 2aCR^2 + 14am^2R + aCmR - 24am^3 + \epsilon 2aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm) \\ & - R(R^2 - 5mR + 3CR + 6m^2)\delta\sqrt{R(2\epsilon R + 2m + C)} \end{aligned} \right] \\
&\quad \left[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m-C)\delta\sqrt{2\epsilon R + 2m + C} \right]^2
\end{aligned}$$

[右辺]の第3項

$$\frac{2R^2[J(R-2m+C) - 4am]}{R^3 + Ja(2m-C)} \times [J^2 a(m-C) - JR^2(R-3m+2C) + aR^2(3m-2C)]$$

$$\begin{aligned}
&= 2\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \times \\
&\quad \left[R^6 [(-amR^2 - 2aCR^2 + 14am^2R + aCmR - 24am^3) + \varepsilon 2aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)] \right. \\
&\quad \left. - R(R^2 - 5mR + 3CR + 6m^2)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \right] \\
&\quad \times \frac{1}{\left[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \right]^2} \\
&= \frac{\left[2R^6 [(-amR^2 - 2aCR^2 + 14am^2R + aCmR - 24am^3) + \varepsilon 2aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)] \times \right. \\
&\quad \times \delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} - 2R^8 [2\varepsilon R^3 + 2mR^2 + CR^2 - 10\varepsilon m^2R - 10m^2R - 5CmR + 6\varepsilon CR^2 \\
&\quad \left. + 6CmR + 3C^2R + 12\varepsilon m^2R + 12m^3 + 6Cm^2] \right]}{\left[R^3 - 2mR^2 \dots \right]^2} \\
&= 2R^6 \frac{\left[-R^2(2mR^2 + CR^2 - 10m^2R + CmR + 12m^3) - \varepsilon 2R^3(R^2 - 5mR + 3CR + 6m^2) \right. \\
&\quad \left. + [a(-mR^2 - 2CR^2 + 14m^2R + CmR - 24m^3) + \varepsilon 2aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)] \times \right. \\
&\quad \left. \times \delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \right]}{\left[R^3 - 2mR^2 + CR^2 - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \right]^2}
\end{aligned}$$

微分方程式は次のようになっていた。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} [R^3 + Ja(2m - C)]^2 &= \frac{(m + C)[R^3 + Ja(2m - C)]^2}{R^2} \\
&+ \frac{[J(R - 2m + C) - 2am + aC] \cdot [J(R - 2m + C) + 3aC]R}{1} \\
&+ \frac{2R^2[J(R - 2m + C) - 4am] \cdot [J^2a(m - C) - JR^2(R - 3m + 2C) + aR^2(3m - 2C)]}{R^3 + Ja(2m - C)}
\end{aligned}$$

既に計算した上記の微分方程式の全ての項目を代入する。なお、分母の $[R^3 - 2mR^2 \dots]$ は約分。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} [R^{10}(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)] \\
&= R^8(mR^2 + CR^2 - 4m^2R - 2CmR + 4m^3) \\
&\quad + R^8(2mR^2 + CR^2 - 8m^2R + 8m^3) + \varepsilon 2R^9(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) \\
&\quad + 2aR^6(3mR^2 + 2CR^2 - 12m^2R - 2CmR + 12m^3)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \\
&\quad - 2R^8(2mR^2 + CR^2 - 10m^2R + CmR + 12m^3) - \varepsilon 4R^9(R^2 - 5mR + 3CR + 6m^2) \\
&\quad + 2aR^6(-mR^2 - 2CR^2 + 14m^2R + CmR - 24m^3)\delta\sqrt{} \\
&\quad + \varepsilon 4aR^7(3mR^2 - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta\sqrt{} \\
&= R^6 \left[\begin{aligned} &mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon 2R^3(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) \\ &+ 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \\ &+ \varepsilon 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} R^4(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) \\
&= mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon \cdot 2R^3(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) \\
&\quad + 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \\
&\quad + \varepsilon \cdot 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \quad C = e^2/R \quad (d\varepsilon \text{ 2 次オーダ})
\end{aligned}$$

上記の 2 次オーダ微分方程式を **Space Fantasy** (宙風流) 微分方程式 と呼ぼう。

R の 2 次オーダーを採用したが、1 次オーダーまでとする。0 次オーダーでは C が消去され、 e の特性が出てこないのが不適である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} R^4 (R - 4m) &= mR^2 (-R + 8m) + \varepsilon \cdot 2R^3 (-R + 6m) + 4am(R + m) \delta \sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \\ &+ \varepsilon \cdot 4a(3mR - 2CR - 6m^2) \delta \sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \quad (d\varepsilon \text{ 1 次オーダー}) \end{aligned}$$

5・2 エネルギー極小軌道の条件

Space Fantasy 微分方程式の解を $\varepsilon = \varepsilon(R, K)$ 又は $F(\varepsilon, R, K) = 0$ と置く。(K は積分定数) エネルギー的安定である ε の極小点・極大点を求めるため ε を R で偏微分する。

$$\frac{\partial \varepsilon(R, K)}{\partial R} = 0 \quad \text{又は} \quad \frac{\partial F}{\partial R} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} + \frac{\partial F}{\partial K} \cdot \frac{\partial K}{\partial R} = 0 \quad \left(\text{但し } \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = 0 \right)$$

結局

$$\begin{cases} F(\varepsilon, R, K) = 0 \\ \frac{\partial F(\varepsilon, R, K)}{\partial R} = 0 \end{cases} \quad \text{これを連立させて、} R, K \text{ の関係を決定することになる。}$$

なお、 $\partial \varepsilon / \partial R = 0$ の計算では、 ε の近似式解誤差を除外するため原始関数の微分方程式から算出する。理想的 $F(\varepsilon, R, K)$ は 2 次オーダー Space Fantasy 微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} R^4 (R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) &= mR^2 (-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon 2R^3 (-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) \\ &+ 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2) \delta \sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \\ &+ \varepsilon 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm) \delta \sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \end{aligned}$$

を満足している。

$\frac{\partial F(\varepsilon, R, K)}{\partial R}$ は $\frac{\partial \varepsilon(R, K)}{\partial R}$ と同義であるので $\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = 0$ を満足する R を $R = r$ と表すことにする。

SF 式で $\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = 0$ と置くと、2 次オーダー式としては (微分・積分は終了している) 次のようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= mr^2 (-r^2 + 8mr - 4Cr - 12m^2) + \varepsilon 2r^3 (-r^2 + 6mr - 4Cr - 8m^2) \\ &+ \{2am(2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2) + \varepsilon 4ar(3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm)\} \delta \sqrt{r(2\varepsilon r + 2m + C)} \\ r^3 [m^2 (-r + 8m)^2 + \varepsilon^2 \cdot 4r^2 (-r + 6m)^2 + \varepsilon \cdot 4mr (-r + 8m) (-r + 6m)] \\ &= [16a^2 m^2 (r + m)^2 + \varepsilon^2 16a^2 (3mr - 2Cr - 6m^2)^2 + \varepsilon \cdot 32a^2 m (r + m) (3mr - 2Cr - 6m^2)] \times \\ &\quad \times (2\varepsilon r + 2m + C) \\ \varepsilon^3 \cdot 96a^2 mr (3mr - 4Cr - 12m^2) - \varepsilon^2 \cdot 4r^5 (r - 12m) - \varepsilon \cdot 4mr^4 (r - 14m) - r^3 m^2 (r - 16m) &= 0 \end{aligned}$$

ε^0 の係数は ε^2 , ε^1 の係数に比べ極めて小さいので上記 3 次方程式の微小解は次のように計算できる。

$$(x^2 + ax + b)(x + \theta) = 0 \quad \theta : \text{微小解}$$

$$x^3 + (\theta + a)x^2 + (a\theta + b)x + b\theta = 0$$

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$\text{つまり } a = A, \quad b = B, \quad \text{微小解 } \theta = \frac{C}{B} \quad x = -\theta$$

$$\left[\varepsilon + \frac{m(r-16m)}{4r(r-14m)} \right] \cdot \left[\varepsilon - \frac{r^3(r-12m)}{48a^2m \left(3m - 4C - \frac{12m^2}{r} \right)} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{96a^2m^2 \left(3m - 4C - \frac{12m^2}{r} \right) (r-14m)}{r^4(r-12m)^2}} \right) \right] \times$$

$$\times \left[\varepsilon - \frac{r^3(r-12m)}{48a^2m \left(3m - 4C - \frac{12m^2}{r} \right)} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{96a^2m^2 \left(3m - 4C - \frac{12m^2}{r} \right) (r-14m)}{r^4(r-12m)^2}} \right) \right] = 0$$

$$\varepsilon_1 \equiv -\frac{m(r-16m)}{4r(r-14m)} \equiv \frac{-m}{4r} \quad (\varepsilon_1 \text{ 1 次オーダー, 0 次オーダー})$$

$$\varepsilon_2 \equiv -\frac{m(r-14m)}{r(r-12m)} \equiv \frac{-m}{r} \quad (\varepsilon_2 \text{ 1 次オーダー, 0 次オーダー})$$

$$\varepsilon_3 \equiv \frac{r^3(r-12m)}{24a^2m \left(3m - 4C - \frac{12m^2}{r} \right)} \equiv \frac{r^4}{72a^2m^2}$$

ここではエネルギーの絶対値が最小となる ε_1 を利用する。なお、 ε_2 は Space Fantasy 微分方程式の解に現れる積分定数 K が各惑星によって異なるので不適である。

エネルギーを極小とする S (次ページの変数変換結果を先取り) は次のようになる。

$$S = R\sqrt{2\varepsilon R^2 + 2mR + e^2}$$

$$= r \sqrt{\frac{-mr(r-16m)}{2(r-14m)} + 2mr + e^2} = r \sqrt{\frac{3mr^2 - 40m^2r + 2e^2r - 28me^2}{2(r-14m)}}$$

$$\equiv r \sqrt{\frac{r(3mr - 40m^2 + 2e^2)}{2(r-14m)}} \quad (S \text{ 1 次オーダー})$$

$$\equiv r \sqrt{\frac{3mr}{2}} \quad (S \text{ 0 次オーダー})$$

惑星軌道のように大きく離れた飛び飛びの固有値問題に対して、グロスな 0 次オーダーの ε_1 , S を使う。土星リングの個数のように繊細な微小差で、僅かな違いを問題にする場合、1 次オーダー、又は 2 次オーダーの ε_1, S を、更に緻密な土星リングの軌道ではカルダノの公式による 3 次方程式の根を使う。この $\varepsilon = -m/4r$ は、エネルギー極小軌道の条件であり、次にこの極小エネルギー ε を Space Fantasy 式の解 $F(\varepsilon, r, K)=0$ に代入して (r, K) の関係を決めることになる。

第 3 章 ティティウス・ボーデ法則

3・1 Space Fantasy 微分方程式の近似解

Space Fantasy 微分方程式を解くために、次の 2 次オーダーの式に対して変数変換を行う。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} R^4 (R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) \quad C = e^2/R$$

$$= mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon 2R^3(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2)$$

$$+ 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}$$

$$+ \varepsilon 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}$$

$$W = \frac{\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}{R^n} \quad \text{と変数変換すると、}$$

$$W^2 R^{2n} = R(2\varepsilon R + 2m + C)$$

$$\varepsilon = \frac{W^2 R^{2(n-1)}}{2} - \frac{m}{R} - \frac{e^2}{2R^2}$$

$$d\varepsilon = R^{2(n-1)}WdW + (n-1)W^2R^{2n-3}dR + \frac{mdR}{R^2} + \frac{e^2dR}{R^3}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dR} = R^{2n-2}W\frac{dW}{dR} + (n-1)W^2R^{2n-3} + \frac{m+C}{R^2}$$

これらを 2 次オーダの Space Fantasy 微分方程式に代入する。

$$\left(WR^{2n-2}\frac{dW}{dR} + (n-1)W^2R^{2n-3} + \frac{m+C}{R^2} \right) R^4(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)$$

$$= mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + R^2(W^2R^{2n-1} - 2m - C)(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) + 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)\delta WR^n$$

$$+ 2a(W^2R^{2n-1} - 2m - C)(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta WR^n$$

$$WR^{2n+2}(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)\frac{dW}{dR} + (n-1)W^2R^{2n+1}(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)$$

$$+ mR^2(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) + CR^2(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)$$

$$= mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2)$$

$$+ W^2R^{2n+1}(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) + 2mR^2(R^2 - 6mR + 4CR + 8m^2)$$

$$+ CR^2(R^2 - 6mR + 4CR + 8m^2) + \delta W 2amR^n(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)$$

$$+ \delta W^3 2aR^{3n-1}(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm) + \delta W 4amR^n(-3mR + 2CR + 6m^2 - 7Cm)$$

$$+ \delta W 2aCR^n(-3mR + 2CR + 6m^2 - 7Cm)$$

$$WR^{2n+2}(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)\frac{dW}{dR}$$

$$= W^2R^{2n+1}[-nR^2 + (4n+2)mR - (2n+2)CR - (4n+4)m^2] + 2CR^2(CR + 2m^2)$$

$$+ \delta W^3 \cdot 2aR^{3n-1}(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm) + \delta W 2aR^n(2mR^2 - 4m^2R + 2C^2R - 8Cm^2 - 7C^2m)$$

$$WR^{2n+1}(R^2 - 4mR)\frac{dW}{dR}$$

$$= 2e^2(e^2 + 2m^2) + \delta W 4amR^n(R - 2m) + W^2R^{2n}[-nR^2 + (4n+2)mR]$$

$$+ \delta W^3 2aR^{3n-2}(3mR - 2e^2 - 6m^2)$$

(1 次オーダ)

さらに 0 次オーダを採用する。この 0 次オーダ式は $\frac{\partial \varepsilon}{\partial R}$ の 0 次オーダ式と違って、定数 m, a, e を含んでいる。

$$WR^{2n+3}\frac{dW}{dR} = 2e^2(e^2 + 2m^2) + \delta W 4amR^{n+1} - W^2nR^{2n+2} + \delta W^3 6amR^{3n-1}$$

$$\frac{dW}{dR} = \frac{2e^2(e^2 + 2m^2)}{WR^{2n+3}} + \frac{4a\delta m}{R^{n+2}} - \frac{nW}{R} + \frac{6a\delta mW^2}{R^{-n+4}} \quad (0 \text{ 次オーダ})$$

上式において $n=-1$ とすると微分方程式が簡素化する。

$n=-1$ として W を S として表すと、Space Fantasy 微分方程式は次のようになる。

$$S = R\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}$$

$$\frac{dS}{dR} = \frac{2e^2(e^2 + 2m^2)}{SR} + \frac{4a\delta m + S}{R} + \frac{6a\delta mS^2}{R^5} \quad (0 \text{ 次オーダ})$$

上記は 変数変換した Space Fantasy 微分方程式である。

この微分方程式はリッカチ微分方程式よりも複雑な形であり、リッカチ微分方程式の厳密な一般解は初等代数学で解けないことが証明されている。(参考資料 8) そこで近似解を考えることにする。

リッカチ相当項 $6a\delta m S^2/R^5$ は S/R , $4a\delta m/R$ に比べ、 S の次数の増分より、分母 R の次数増分が遥かに大きいので、微小として定数扱いにした近似解を考える。

これから使用する微分方程式の積分公式を次に記しておく。(参考資料 1)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx &= \frac{1}{2a} \log(ax^2 + bx + c) - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} + K \quad K: \text{積分定数} \\ &= \frac{1}{2a} \log(ax^2 + bx + c) - \frac{b}{2a} \cdot \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}} + K \quad (\Delta = 4ac - b^2 > 0) \\ &= \frac{1}{2a} \log(ax^2 + bx + c) - \frac{b}{2a} \cdot \log \frac{2ax + b - \sqrt{-\Delta}}{2ax + b + \sqrt{-\Delta}} + K \quad (\Delta = 4ac - b^2 < 0) \end{aligned}$$

第 4 項のリッカチ相当項は微小であるので、定数扱いして第 2 項に組み込み微分方程式の近似解を求めるが、第 1 項や第 3 項に組み込むと旨くない。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dR} &= \frac{1}{S} \left[\frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} + \frac{S^2}{R} + \frac{6a\delta m S^3}{R^5} \right] \quad E^4 = e^2(e^2 + 2m^2) \\ &= \frac{1}{S} \left[\frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} \left(1 + \frac{6S^2}{4R^4} \right) + \frac{S^2}{R} \right] \\ &= \frac{1}{S} \left[\frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} \left(1 + \frac{3S_0^2}{2R_0^4} \right) + \frac{S^2}{R} \right] \quad \theta = \frac{3S_0^2}{2R_0^4} \quad (S_0^2, R_0^4 \text{ は重心点 } S^2/3, R^4/5 \text{ とする。}) \\ &= \frac{1}{S} \left[\frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} (1 + \theta) + \frac{S^2}{R} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{SdS}{S^2 + 4a\delta m S(1 + \theta) + 2E^4} = \frac{dR}{R} \quad (\text{判別式 } \Delta = 2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2 > 0 \text{ とする。})$$

積分公式を使って微分方程式を解くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log[S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4] - \frac{4a\delta m(1 + \theta)}{2\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan \left(\frac{2S + 4a\delta m(1 + \theta)}{2\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \right) \\ = \log R + K \\ \frac{S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4}{R^2} = K \cdot \text{EXP} \left[\frac{4a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \right) \right] \\ K = \frac{S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

リッカチ相当項の影響を線形化して調べるため 次のような θ の関数 $f(\theta)$ を導入する。

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \right) \right] \\ &- K = 0 \end{aligned}$$

$f(\theta)$ を次のようにマクローリン級数展開して、線形化する。

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f(0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial f(0)}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(0)}{(\partial \theta)^2} \theta^2 + \dots \\ \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} &= \frac{4a\delta m S}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{S^2 + 4a\delta m(1+\theta)S + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} \right) \right] \times \\
& \times \left[\left\{ \frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} - \frac{4a\delta m(1+\theta) \cdot 4a^2m^2(1+\theta)}{[2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{4a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(S + 2a\delta m(1+\theta))^2}{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} \times \right. \\
& \quad \left. \times \left\{ \frac{2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} + \frac{[S + 2a\delta m(1+\theta)]4a^2m^2(1+\theta)}{[2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

マクローリン級数展開の係数として

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{S^2 + 4a\delta mS + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right) \right] - K \\
\frac{\partial f(0)}{\partial \theta} &= \frac{4a\delta mS}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right) \right] \\
& + \frac{S^2 + 4a\delta mS + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right) \right] \times \\
& \times \left[\left\{ \frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} - \frac{16a^3\delta m^3}{(2E^4 - 4a^2m^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \cdot \frac{2E^4 - 4a^2m^2}{S^2 + 4a\delta mS + 2E^4} \cdot \left\{ \frac{2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} + \frac{(S + 2a\delta m) \cdot 4a^2m^2}{[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

S 、 r が充分大きいとして微小項を省略すると、マクローリン級数展開の係数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
S &\doteq r \sqrt{\frac{r(3mr - 40m^2 + 2e^2)}{2(r - 14m)}} \doteq r \sqrt{\frac{3mr}{2}} \quad (0 \text{ 次オーダー}) \text{ を代入する。} \\
f(0) &= \frac{3mr^3}{2r^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right] - K \\
&= \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right] - K \\
\frac{\partial f(0)}{\partial \theta} &= \frac{4a\delta m}{r^2} \cdot \frac{r\sqrt{3mr}}{\sqrt{2}} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right] \\
& + \frac{3mr^2}{2r^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right] \times \\
& \times \left[\left\{ \frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} - \frac{16a^3\delta m^3}{(2E^4 - 4a^2m^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \arctan \left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{8a\delta m(E^4 - 4a^2m^2)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \cdot \frac{2}{r^2 3mr} \cdot \left\{ \frac{2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} + \frac{2a^2m^2 r\sqrt{3mr}}{[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \right] \\
&= \frac{4a\delta m\sqrt{3mr}}{r\sqrt{2}} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right] \\
& + \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{-8a\delta m E^4}{[2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) - \frac{8a^3 \delta m^3}{(E^4 - 2a^2 m^2)r\sqrt{3mr}} \right] \\ & = \frac{-12a\delta m^2 r E^4}{[2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] \times \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \end{aligned}$$

$$f(\theta) = f(0) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{\partial f(0)}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f(0)}{(\partial \theta)^2} \theta^2 + \dots = 0$$

$$\begin{aligned} & = \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] - K \\ & - \frac{12a\delta m^2 r E^4}{[2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] \times \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \cdot \theta = 0 \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{3S_0^2}{2R_0^4} = \frac{3 \cdot 5S^2}{2 \cdot 3r^4} = \frac{5 \cdot 3mr^3}{2 \cdot 2r^4} = \frac{15m}{4r} \text{ を代入する。}$$

$$\begin{aligned} f(\theta) & = \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] - \frac{15m}{4r} \frac{12a\delta m^2 r E^4}{[2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \times \\ & \times \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] \times \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) - K = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] \times \\ & \times \left[1 - \frac{30a\delta m^2 E^4}{r[2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \times \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] - K = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K & = \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] \times \\ & \times \left[1 - \frac{30a\delta m^2 E^4}{r[2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) \right] \end{aligned}$$

r が充分大きいとして $\arctan\left(\frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi N - \frac{2\sqrt{E^4 - 2a^2 m^2}}{r\sqrt{3mr}}$ となるので、

$$K = \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-2a\delta m\pi(1+2N)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \right] \cdot \left[1 - \frac{30a\delta m^2 E^4}{r[2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\pi(1+2N)}{2} \right] \quad (N \text{ は周期})$$

3・2 ティティウス・ボーデ法則の証明

Space Fantasy 微分方程式の近似解の積分定数 K は中心核星に属する全ての惑星に共通であるので、基準惑星を r_1 、 N_1 として (ティティウス・ボーデ法則では基準を地球としている)、 K を出す。基準惑星との遠日点・近日点距離比を ξ とする。

$$\xi = \frac{r}{r_1}$$

$$K = \frac{3m\xi r_1}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-2a\delta m\pi(1+2N)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \right] \cdot \left[1 - \frac{30a\delta m^2 E^4}{\xi r_1 [2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\pi(1+2N)}{2} \right]$$

$$= \frac{3mr_1}{2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-2a\delta m\pi(1+2N_1)}{\sqrt{2E^4-4a^2m^2}} \right] \cdot \left[1 - \frac{30a\delta m^2E^4}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\pi(1+2N_1)}{2} \right]$$

$$\text{EXP} \left[\frac{-2a\delta m\pi(2N-2N_1)}{\sqrt{2E^4-4a^2m^2}} \right] = \frac{1 - \frac{15a\delta m^2E^4\pi(1+2N_1)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}}{\xi - \frac{15a\delta m^2E^4\pi(1+2N)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}}$$

$N-N_1=n-1$ とすると、 $N=N_1+n-1$ となるので、これを上式に代入する。

$$\text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4-4a^2m^2}} \right] = \frac{1 - \frac{15a\delta m^2E^4\pi(2N_1+1)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}}{\xi - \frac{15a\delta m^2E^4\pi(2N_1+2n-1)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}}$$

$$\frac{4a\delta m\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4-4a^2m^2}} = \log \left[\frac{\xi - \frac{15a\delta m^2E^4\pi(2N_1+2n-1)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}}{1 - \frac{15a\delta m^2E^4\pi(2N_1+1)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}} \right]$$

$$n-1 = \frac{\sqrt{2E^4-4a^2m^2}}{4a\delta m\pi} \cdot \log \left[\frac{\xi - \frac{15a\delta m^2E^4\pi(2N_1+2n-1)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}}{1 - \frac{15a\delta m^2E^4\pi(2N_1+1)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}} \right] \quad (n \text{ は周期差})$$

一方、ティティウス・ボーデ法則は次のように表わされる。

$$\xi_{Earth} = 0.4 + 0.3 \times 2^n = 0.4 + 0.6 \times 2^{n-1} \quad (\xi_{Earth} : \text{地球基準の } \xi)$$

$$2^{n-1} = \frac{1}{0.6} (\xi_{Earth} - 0.4)$$

$$n-1 = \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{\xi_{Earth} - 0.4}{1 - 0.4}$$

このティティウス・ボーデ法則の式は上記の Space Fantasy 式近似解と酷似しており、係数を次のように決めることによって一致する。(地球は $n=1$)

$$\frac{1}{\log 2} = \frac{\sqrt{2E^4-4a^2m^2}}{4a\delta m\pi}$$

$$0.4 = \frac{15a\delta m^2E^4\pi(2N_1+1)}{r_1[2E^4-4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \quad E^4 = e^2(e^2 + 2m^2) \text{ である。}$$

E は天体定数であり測定によって決定されるが、現時点で不明であるので、上式の上から e が概算され、又、これにより上式の下から仮想的 M_1 も概算される。

$$\text{地球の } r_1 = 1.5 \times 10^8 \text{ km} \quad \text{太陽の } m = 1.476 \text{ km} \quad a = 0.32 \text{ km (参考資料 4) として試算すると}$$

$$e = 2.1 \text{ km} \quad N_1 = 1.5 \times 10^7 \quad \text{となり、} N_1 \text{ が非常に大きい。}$$

この式の惑星軌道距離 r_1 は中心核星から見ると M_1 番目のエネルギー的安定軌道であることを意味

しているので、基底 $N_1 = 0$ 番目の軌道距離は単純に上式より $r_1 = 4.9 \text{ km}$ (概ね 3 m) となる。シュバルツシルトのブラックホール半径が $2m$ であることを考えると、 $N_1 = 1.5 \times 10^7$ は妥当な数値であろう。この結果 $2N_1 + 2n - 1 \approx 2N_1$ となる。

従って、基準星との半径比 ξ は次のようになり、各周期に対して夫々 1 個のエネルギー的安定軌道半径が対応する。なお、 $\delta = -1$ の場合でも $4a\delta m\pi(n-1) \Rightarrow 4am\pi(n-1)$ と変換できる。 $n = 2 - n$

$$n - 1 = \frac{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}}{4a\delta m\pi} \cdot \log \left[\frac{\xi - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}}{1 - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}} \right] \quad E^4 = e^2(e^2 + 2m^2)$$

$$\xi = \left[1 - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[\frac{4am\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right] + \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (n \text{ は周期差})$$

$$\xi_{\text{Earth}} = (1 - 0.4) \cdot 2^{n-1} + 0.4$$

ここで $\delta = \pm 1$ 。 δ は軌道と中心核星の回転方向に関わるものであり、同一方向の場合 $\delta = +1$ 。

こうして上式の ξ は、ティティウス・ボーデ法則 ξ_{Earth} と一致し、法則が証明された。

また、軌道と中心核星の回転方向が逆である $\delta = -1$ の場合

$$\xi = \left[1 + \frac{30am^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[\frac{4am\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right] - \frac{30am^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}$$

となり、「惑星軌道半径の比が太陽系惑星のものと同転する」実現象が系外惑星に起る。(参考資料 5)

近日点を添字 N 、遠日点を添字 F で表すと、基準惑星との近日点距離比、遠日点距離比は次のように表され、 ξ の中に r_1 が含まれるため、 ξ_N と ξ_F は、若干異なる。

$$\xi_N = \frac{r_N}{r_{1N}} = \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_{1N} [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} + \left[1 - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_{1N} [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[\frac{4am(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right]$$

$$\xi_F = \frac{r_F}{r_{1F}} = \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_{1F} [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} + \left[1 - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_{1F} [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[\frac{4am(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right]$$

惑星軌道のティティウス・ボーデ法則は軌道長径を使って表されており、近日点距離と遠日点距離の和である長径は次の通りである。

$$r_F + r_N = \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} + \left[r_{1F} - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[\frac{4am(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right]$$

$$+ \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} + \left[r_{1N} - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[\frac{4am(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right]$$

$$\xi = \frac{r_F + r_N}{r_{1F} + r_{1N}} = \frac{60a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{(r_{1F} + r_{1N}) [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} + \left[1 - \frac{60a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{(r_{1F} + r_{1N}) (2E^4 - 4a^2m^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[\frac{4am(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right]$$

以上の結果、これまで天体観察の実験式であった長径基準のティティウス・ボーデ法則は天体定数の理論に裏付けされた **Space Fantasy ティティウス理論式** に格上げされる。

3・3 ティティウス・ボーデ法則の改善

ティティウス・ボーデ法則は非常に簡素な形をしているものの、 $n = -1$ であるべき水星について適切でないので、ティティウス・ボーデ法則の改善式を検討する。もともと Space Fantasy 微分方程式は、リッカチ微分方程式よりも複雑な形をしており、厳密な一般解は得られないので、いくつかの近似解が存在しうる。

① θ の高次項を考える。

$$f(\theta) = \frac{S^2 + 4a\delta m(1+\theta)S + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} \right) \right]$$

$$-K = 0$$

$$f(\theta) = f(0) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{\partial f(0)}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f(0)}{\partial \theta^2} \theta^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 f(0)}{\partial \theta^3} \theta^3 +$$

として、前節では θ の 1 次項までを採用しティティウス・ボーデ法則を証明できたが、ここでは θ の 3 次項 (S0 次オーダ) までを採用する。その計算結果だけを示すと次のようになる。

$$n - 1 = \frac{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}}{4a\delta m\pi} \cdot \log \left[\frac{\xi \left(1 - \frac{10U}{3\xi} + \frac{18U^2}{5\xi^2} - \frac{52U^3}{21\xi^3} \right)}{\left(1 - \frac{10U}{3} + \frac{18U^2}{5} - \frac{52U^3}{21} \right)} \right]$$

$$U = \frac{9a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}} r_1}$$

② さらに式全体を $f(\theta)$ とするのでなく、 $\arctan(S+\dots)$ のみを級数展開することもできる。

$$\frac{S^2 + 4a\delta m(1+\theta)S + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} f(\theta) \right] - K = 0$$

$$f(\theta) = \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1+\theta)^2}} \right) = f(0) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{\partial f(0)}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f(0)}{\partial \theta^2} \theta^2$$

θ^2 の 2 次項 (S1 次オーダ) まで採用した計算結果だけを示すと次のようになる。

$$n - 1 = \frac{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2 - \frac{30a^2m^3}{r_1\xi}}}{4a\delta m\pi \left(1 + \frac{15m}{4r_1\xi} \right)} \cdot \log \left[\frac{\xi \left(\xi + \frac{2e^2 - 40m^2}{3mr_1} \right) \left(1 - \frac{14m}{r_1} \right)}{\left(1 + \frac{2e^2 - 40m^2}{3mr_1} \right) \left(\xi - \frac{14m}{r_1} \right)} \right]$$

$$-N_1 \left[1 - \frac{1 + \frac{15m}{4r_1}}{1 + \frac{15m}{4r_1\xi}} \sqrt{\frac{1 - \frac{15a^2m^3}{(E^4 - 2a^2m^2)r_1\xi}}{1 - \frac{15a^2m^3}{(E^4 - 2a^2m^2)r_1}}} \right]$$

③ 簡単な摂動法を用いて

$$r^2 = \Delta_0 + \frac{S^2 + 4a\delta mS + 2E^4}{K} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right) \right]$$

この式を Space Fantasy 微分方程式に代入 (S0 次オーダ) して Δ_0 を近似すると、次のようになる。

$$n - 1 = \frac{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}}{4a\delta m\pi} \cdot \log \left[\frac{2r_1\xi^2}{9m} \left\{ 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{9m}{r_1\xi} \right) \left(1 - \frac{9m}{r_1} \right)} \right\} \right]$$

④ さらに変数摂動法を用いて

$$r^2 = \Delta(r) + \frac{S^2 + 4a\delta mS + 2E^4}{K} \cdot \text{EXP} \left[\frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left(\frac{S + 2a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right) \right]$$

この式を Space Fantasy 微分方程式に代入 (S0 次オーダー) して $\Delta(r)$ の微分方程式を近似していくと次のようになる。

$$n - 1 = \frac{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}}{4a\delta m\pi} \times \left\{ \frac{7}{2} \log \xi + \log \left[\frac{1 + \frac{1}{\log \sqrt{6mr_1^3} - \log 2}}{1 + \frac{1}{\log \sqrt{6m\xi^3 r_1^3} - \log 2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{144a\delta m^2}{\xi^2 r_1^2 \sqrt{6m\xi r_1}} \left(1 + \frac{1}{\log \sqrt{6m\xi^3 r_1^3} - \log 2}\right)}}{1 - \sqrt{1 - \frac{144a\delta m^2}{r_1^2 \sqrt{6mr_1}} \left(1 + \frac{1}{\log \sqrt{6mr_1^3} - \log 2}\right)}} \right] \right\}$$

太陽系惑星について試算すると、いずれの近似解も SF ティティウス・ボーデ式を大きく改善するに至らない。これは Space Fantasy 微分方程式の近似解法に起因しているのではないようだ。太陽に最も近い水星は近日点移動の微細量が一般相対性理論によって立証されたように、 $n = -1$ の水星軌道は相対論的影響を十分に受けている。つまり、中心核星から十分離れているとは言えず、本解析の適用が危ぶまれる空間に位置している為だと考えられる。

なお、これまで中心核星単独によるエネルギー的安定軌道のみを調べたが、惑星自身によるエネルギー的安定の相互作用を連立させると、さらに軌道計算の精度は向上する。

第4章 土星リング

4・1 土星リングの個数

天体定数 E は $E^4 = e^2(e^2 + 2m^2)$ であり、これまで Space Fantasy 微分方程式の判別式は 電荷の影響 e が大きい ($\Delta = 2E^4 - 4a^2 m^2(1+\theta)^2 > 0$) としてきた。しかし、ここでは回転の影響 a が大きい場合 ($\Delta = 2E^4 - 4a^2 m^2(1+\theta)^2 < 0$)、リングの軌道計算でなく リング個数の考察を行う。

Space Fantasy 微分方程式のリッカチ相当項を定数扱いした微分方程式とその近似解は次のようであった。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dR} &= \frac{1}{S} \left[\frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta mS}{R} \left(1 + \frac{3S_0^2}{2R_0^4} \right) + \frac{S^2}{R} \right] \\ &= \frac{1}{S} \cdot \frac{2E^4 + 4a\delta mS(1+\theta) + S^2}{R} \quad \text{但し } \theta = \frac{3S_0^2}{2R_0^4} \quad E^4 = e^2(e^2 + 2m^2) \\ &\log[S^2 + 4a\delta mS(1+\theta) + 2E^4] \\ &\quad - \frac{2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{4a^2m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \cdot \log \left[\frac{S + 2a\delta m(1+\theta) - \sqrt{4a^2m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta m(1+\theta) + \sqrt{4a^2m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \right] = 2 \log R + K' \\ &\log \left[\frac{\frac{S^2 + 4a\delta mS(1+\theta) + 2E^4}{R^2}}{\left[\frac{S + 2a\delta m(1+\theta) - \sqrt{4a^2m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta m(1+\theta) + \sqrt{4a^2m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \right]^{\frac{2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{4a^2m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}}} \right] = K' \end{aligned}$$

また、対数関数の分母 $\frac{S + 2a\delta m(1+\theta) - \sqrt{4a^2m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta m(1+\theta) + \sqrt{4a^2m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}$ を級数展開し $(1 - \lambda)$ で表す。

$$1 - \lambda = \frac{S + 2a\delta m(1 + \theta) - \sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta m(1 + \theta) + \sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4}} \cdot \frac{2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4}}$$

$$\cong 1 - \frac{4a\delta m(1 + \theta)}{S + 2a\delta m(1 + \theta) + \sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4}} - [2 \text{ 次項}] - [3 \text{ 次項}]$$

このように λ は非常に小さいことがわかる。 λ を使って Space Fantasy 微分方程式の近似解は次のようになる。

$$\frac{S^2 + 4a\delta mS(1 + \theta) + 2E^4}{r^2} \cdot \frac{1}{(1 - \lambda)} = K$$

ここで、積分定数 K は全てのリングについて共通であるので、任意のリングの遠日点・近日点軌道半径を r 、基準リングの軌道半径を r_1 と表わすと、次のようになる。

$$K = \frac{S^2 + 4a\delta mS(1 + \theta) + 2E^4}{r^2} \cdot \frac{1}{(1 - \lambda)} = \frac{S_1^2 + 4a\delta mS_1(1 + \theta_1) + 2E^4}{r_1^2} \cdot \frac{1}{(1 - \lambda_1)}$$

つまり $K = f(r) = f(r_1)$ の関係にある。 $f(r)$ が n 次多項式であれば $f(r_1)$ も同じ関数の n 次多項式であり、 $f(r)$ の多項式の微小項が省略され次数を落とすならば $f(r_1)$ も同じ取り扱いを受け、多項式の微小項が省略され次数を落とす。

記載の簡略化のため $f(r_1)$ を次のように F と表わす。

$$F = \frac{S_1^2 + 4a\delta mS_1(1 + \theta_1) + 2E^4}{r_1^2} \cdot \frac{1}{(1 - \lambda_1)}$$

- ① エネルギー極小の安定軌道 r を使って、変数変換の S 及び θ は 1 次オーダとして次のように表わされる。

$$S = R \sqrt{R \left(2\epsilon R + 2m + \frac{e^2}{R} \right)} = r \sqrt{\frac{r(3mr - 40m^2 + 2e^2)}{2(r - 14m)}}$$

$$\theta = \frac{3S_0^2}{2R_0^4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{S^2}{3} \cdot \frac{5}{R^4} = \frac{5(3mr - 40m^2 + 2e^2)}{4r(r - 14m)}$$

Space Fantasy 微分方程式の近似解の S 及び θ に 1 次オーダのエネルギー的安定軌道 r を代入すると次のようになる。

$$16a^2m^2S^2(1 + \theta)^2 = S^4 + [F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]^2 - 2S^2[F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]$$

$$S^4 - 2S^2[F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4 + 8a^2m^2(1 + \theta)^2] + [F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]^2 = 0$$

$$r^4 \left[\frac{r(3mr - 40m^2 + 2e^2)}{2(r - 14m)} \right]^2 - 2r^2 \left[\frac{r(3mr - 40m^2 + 2e^2)}{2(r - 14m)} \right] \times$$

$$\times \left\{ F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4 + 8a^2m^2 \left[1 + \frac{5(3mr - 40m^2 + 2e^2)}{4r(r - 14m)} \right]^2 \right\} + [F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]^2 = 0$$

$$r^6(r - 14m)(3mr - 40m^2 + 2e^2)^2 - 2r(3mr - 40m^2 + 2e^2) \times$$

$$\times [2F(1 - \lambda)r^4(r - 14m)^2 - 4E^4r^2(r - 14m)^2 + a^2m^2(4r^2 - 41mr - 200m^2 + 10e^2)^2]$$

$$+ 4(r - 14m)^3[F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]^2 = 0$$

F は上式で $r=r_1$ とすることによって正確に求められる。

上記は r の 9 次群方程式であるので、この結果、最大 9 個の群・リングが存在することになる。群・リン

グ内の微細線条軌道は膨大な次数から成る λ によって決定される。

なお、安定軌道半径 r に $d\epsilon$ 1 次オーダの Space Fantasy 式を採用したが、 $d\epsilon$ 2 次オーダを採用すると方程式の次数はさらに高くなる。

以上はエネルギー極値 ϵ_1 1 次オーダについての式であり、エネルギー極値 ϵ_2 に対しても 9 次群方程式になるが、 ϵ_2 の K 0 次オーダでは次のように距離諸元が消滅するので ϵ_2 は不適である。

なお、ティティウス・ボーデ法則の証明でも ϵ_2 は不適であったように、同一の Space Fantasy 微分方程式から派生した $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3$ のうち $\epsilon_2 \cdot \epsilon_3$ は棄却される。

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &\equiv -\frac{m(r-16m)}{4r(r-14m)} \equiv -\frac{m}{4r} & \epsilon_2 &\equiv -\frac{m(r-14m)}{r(r-12m)} \equiv -\frac{m}{r} \\ S &\equiv r\sqrt{\frac{r(3mr-40m^2+2e^2)}{2(r-14m)}} \equiv r\sqrt{\frac{3mr}{2}} & S &\equiv r\sqrt{\frac{r(4m^2+e^2)-12me^2}{r-12m}} \equiv r\sqrt{4m^2+e^2} \\ K &\equiv \frac{r(3mr-40m^2+2e^2)}{2(1-\lambda)(r-14m)} \equiv \frac{3mr}{2(1-\lambda)} & K &\equiv \frac{4a\delta m}{(1-\lambda)(r-12m)}\sqrt{\frac{r(4m^2+e^2)-12me^2}{r-12m}} + \\ & \text{(参考 17 ページ)} & & + \frac{r(4m^2+e^2)-12me^2}{(1-\lambda)(r-12m)} \equiv \frac{4m^2+e^2}{1-\lambda} \end{aligned}$$

② $d\epsilon$ 2 次オーダを採用する場合の方程式の次数を算定する。 $d\epsilon$ 2 次オーダの Space Fantasy 微分方程式で $\partial\epsilon/\partial R = 0$ とすると、エネルギーの極小条件は次のようになる。(2 乗している)

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & m^4 \left[\begin{aligned} & (-r^2 + 8mr - 4Cr - 12m^2)^2 + \epsilon^2 4r^2 (-r^2 + 6mr - 4Cr - 8m^2)^2 \\ & + \epsilon 4mr (-r^2 + 8mr - 4Cr - 12m^2) (-r^2 + 6mr - 4Cr - 8m^2) \end{aligned} \right] \\ & = \left[\begin{aligned} & 4a^2 m^2 (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2 + \epsilon^2 16a^2 r^2 (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm)^2 \\ & + \epsilon 16a^2 mr (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2) (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm) \end{aligned} \right] \times r(2\epsilon r + 2m + C) \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \epsilon^3 \cdot 32a^2 r^3 (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm)^2 \\ & + \epsilon^2 \cdot r^2 \left[\begin{aligned} & 16a^2 (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm)^2 (2m + C) \\ & + 32a^2 m (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2) (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm) \\ & - 4r^3 (-r^2 + 6mr - 4Cr - 8m^2)^2 \end{aligned} \right] \\ & + \epsilon \cdot 4mr \left[\begin{aligned} & 2a^2 m (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2 \\ & + 4a^2 (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2) (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm) (2m + C) \\ & - r^3 (-r^2 + 8mr - 4Cr - 12m^2) (-r^2 + 6mr - 4Cr - 8m^2) \end{aligned} \right] \\ & + m^2 [4a^2 (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2 (2m + C) - r^3 (-r^2 + 8mr - 4Cr - 12m^2)^2] = 0 \end{aligned}$$

ϵ^0 の係数は ϵ^2, ϵ^1 の係数に比べ非常に小さいので、3 次方程式の正確な解 Cardano の公式でなく 微小解の近似解法によって ϵ_1 を算出すると次のようになる。

$$\epsilon_1 = \frac{-m}{4r} \cdot \frac{r^3 (r^2 - 8mr + 4Cr + 12m^2)^2 - 4a^2 (2m + C) (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2}{\left[\begin{aligned} & r^3 (r^2 - 8mr + 4Cr + 12m^2) (r^2 - 6mr + 4Cr + 8m^2) \\ & - 4a^2 (2m + C) (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2) (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm) \\ & - 2a^2 m (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2 \end{aligned} \right]}$$

変数変換した $S = r\sqrt{r(2\epsilon r + 2m + C)}$ に上記の ϵ_1 を代入する。

$$\begin{aligned}
S^2 &= r^3 \left[\frac{-m}{2} \cdot \frac{r^3(r^2 - 8mr + 4Cr + 12m^2)^2 - 4a^2(2m + C)(2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2}{\begin{aligned} &r^3(r^2 - 8mr + 4Cr + 12m^2)(r^2 - 6mr + 4Cr + 8m^2) \\ &-4a^2(2m + C)(2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)(3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm) \\ &-2a^2m(2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2 \end{aligned}} + (2m + C) \right] \\
&= r^4 \left[\frac{-m}{2} \cdot \frac{r^4(r^2 - 8mr + 4e^2 + 12m^2)^2 - 4a^2(2mr + e^2)(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)^2}{\begin{aligned} &r^5(r^2 - 8mr + 4e^2 + 12m^2)(r^2 - 6mr + 4e^2 + 8m^2) \\ &-4a^2(2mr + e^2)(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)(3mr^2 - 2e^2r - 6m^2r + 7me^2) \\ &-2a^2mr^2(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)^2 \end{aligned}} \right] \\
&\quad + r^2(2mr + e^2) \\
&= \frac{r^4 \times [r^8 \text{ の多項式}] + r^2(2mr + e^2) \times [r^9 \text{ の多項式}]}{[r^9 \text{ の多項式}]} = \frac{r^2 \times [r^{10} \text{ の多項式}]}{[r^9 \text{ の多項式}]} = \frac{r^2 \times P}{Q}
\end{aligned}$$

ここで P, Q を次のようにする。

$$\begin{aligned}
\text{分母 } Q &= r^5(r^2 - 8mr + 4e^2 + 12m^2)(r^2 - 6mr + 4e^2 + 8m^2) \\
&\quad - 4a^2(2mr + e^2)(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)(3mr^2 - 2e^2r - 6m^2r + 7me^2) \\
&\quad - 2a^2mr^2(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)^2 \quad [L^9][r^9 \text{ の多項式}] \\
\text{分子 } P &= -mr^2/2 [r^4(r^2 - 8mr + 4e^2 + 12m^2)^2 - 4a^2(2mr + e^2)(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)^2] \\
&\quad + (2mr + e^2) \times Q \quad [L^{11}][r^{10} \text{ の多項式}]
\end{aligned}$$

また、 θ について

$$\theta = \frac{3S_0^2}{2R_0^4} = \frac{5S^2}{2r^4} = \frac{5r^2P}{2Qr^4} = \frac{5P}{2Qr^2}$$

となる。 λ を使った Space Fantasy 微分方程式の近似解は前々ページの通り次のようであった。

$$\frac{S^2 + 4a\delta mS(1 + \theta) + 2E^4}{r^2} \cdot \frac{1}{1 - \lambda} = K$$

S, θ を代入することになる。積分定数 K は全てのリングについて共通であり、また、基準リングを r_1 、 K を F とすると次のような S の多項式が得られる。

$$\begin{aligned}
F &= \frac{S_1^2 + 4a\delta mS_1(1 + \theta_1) + 2E^4}{r_1^2} \cdot \frac{1}{(1 - \lambda_1)} \\
S^4 - 2S^2[F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4 + 8a^2m^2(1 + \theta)^2] + [F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]^2 &= 0
\end{aligned}$$

上式の S に P, Q を代入して r で表すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r^2P}{Q}\right)^2 - \frac{2r^2P}{Q} \left\{ F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4 + 8a^2m^2 \left(1 + \frac{5P}{2Qr^2}\right)^2 \right\} + [F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]^2 &= 0 \\
P^2Qr^6 - 2P\{ [F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]Q^2r^4 + 2a^2m^2(2Qr^2 + 5P)^2 \} + [F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4]^2Q^3r^2 &= 0
\end{aligned}$$

整理すると

$$Qr^2 (Pr^2 - Q[F(1 - \lambda)r^2 - 2E^4])^2 - 4a^2m^2P(2Qr^2 + 5P)^2 = 0$$

$$E^4 = e^2(e^2 + 2m^2)$$

F は上式で $r=r_1$ とすることによって正確に求められる。

第1項 $Qr^2P^2r^4$ の次数が最も高く r の35 [9+2+10×2+2×2] 乗であるので、上記は高次係数 λ が付いている r^{35} の多項式である。この結果35個の根があるが、下記の4個の微小根を除くと**土星などリング星の群・リングは最大31個（メインリング最大9個、サブリング最大22個）存在すること**になる。（ r の複素数根・マイナス根・重根、中心核星の膨らみによって、実際の有効な r のプラス根は減る。）また、 λ 及び F は軌道と中心核星の回転方向に関わる $\delta = \pm 1$ を含んでいるので、中心核星の回転方向と異なる回転方向のリング星が存在する。

上式の低次数項で F が最初に現れるのは $-F(1-\lambda)r^44E^4Q^3$ の Fa_4r^4 項であり $F \sim mr_1$ と非常に大きいので、 $a_3r^3, a_2r^2, a_1r^1, a_0r^0$ の各係数は4個の微小解に関わることになり、有効なリング個数は最大31個になる。また、 F^2 係数が付いていない項は微小解や遠方解に関わるものであり、省略すると $Qr^2Q^2F^2(1-\lambda)^2r^4=0$ 従って、 $Q \sim 0$ この結果、メインリングは最大9個である。しかし、微細な線条軌道を計算する上で $a_3r^3, a_2r^2, a_1r^1, a_0r^0$ の項も無視できない。

4・2 リング微細係数の膨大な次数

次数解析でリング微細係数 λ の次数をチェックする。 r のべき乗多項式の最大プラスべき乗 $+P$ 、マイナスべき乗 $-Q$ を使ってべき乗多項式を $[+P], [-Q]$ で表わす。

$$1 - \lambda = \frac{S + 2a\delta mS(1 + \theta) - \sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta mS(1 + \theta) + \sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4}} \frac{2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4}}$$

簡単のため $\theta = [-2]$ $S = [+3]^{\frac{1}{2}}$ とした場合

$$\frac{2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4}} = \frac{2a\delta m[-2]}{\sqrt{4a^2m^2[-4] - 2E^4}} = \frac{[-2]}{\sqrt{[-4]}}$$

$$S + 2a\delta m(1 + \theta) + \sqrt{4a^2m^2(1 + \theta)^2 - 2E^4} = [+3]^{\frac{1}{2}} + [-2] + [-4]^{\frac{1}{2}}$$

$$1 - \lambda = \left[1 - \frac{[-4]^{\frac{1}{2}}}{[+3]^{\frac{1}{2}} + [-2] + [-4]^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{[-2]}{\sqrt{[-4]}}} \left[1 - \frac{[-4]^{\frac{1}{2}} \{ [+3]^{\frac{1}{2}} + [-2] - [-4]^{\frac{1}{2}} \}}{\{ [+3]^{\frac{1}{2}} + [-2] + [-4]^{\frac{1}{2}} \} \cdot \{ [+3]^{\frac{1}{2}} + [-2] - [-4]^{\frac{1}{2}} \}} \right]^{\frac{[-2]}{\sqrt{[-4]}}}$$

$$= \left[1 - \frac{[+3]^{\frac{1}{2}} \cdot [-4]^{\frac{1}{2}} + [-2] \cdot [-4]^{\frac{1}{2}} + [-4]}{[+3] + [+3]^{\frac{1}{2}} \cdot [-2] + [-4]} \right]^{\frac{[-2]}{\sqrt{[-4]}}}$$

このようにして分母・分子の $[]^{\frac{1}{2}}$ を消去し平滑なべき乗に展開していくと、分母・分子の次数は大きくなる。簡単のため $\frac{[-2]}{\sqrt{[-4]}} = 1$ としても r のべき乗は非常に大きい。更に $\frac{[-2]}{\sqrt{[-4]}}$ を活かすと、ますます膨大にべき乗が大きくなる。 r のべき乗が大きいということは、それだけ安定軌道半径の線条がたくさん存在していることを意味している。

第5章 ファイン リング星

回転の影響等のバランスが絶妙であり、SF微分方程式の判別式が $\Delta = 2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2 = 0$ である場合を考える。SF微分方程式の原点に戻ると

$$\frac{dS}{dR} = \frac{1}{S} \left[\frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta mS}{R} \left(1 + \frac{3S^2}{2R^4} \right) + \frac{S^2}{R} \right] \quad E^4 = e^2(e^2 + 2m^2)$$

$$\text{判別式は } \Delta = 2E^4 - 4a^2m^2 \left(1 + \frac{3S^2}{2R^4}\right)^2 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{微分方程式は } \frac{dS}{dR} = \frac{1}{S} \cdot \frac{(S + \sqrt{2}E^2)^2}{R} \quad \text{これを解くと}$$

$$K = \frac{S + \sqrt{2}E^2}{R} \text{EXP}\left(\frac{\sqrt{2}E^2}{S + \sqrt{2}E^2}\right) \quad \textcircled{2}$$

$$\text{エネルギー安定式は } S = r\sqrt{3mr/2} \quad \textcircled{3}$$

r, S, K を未知数とする ①, ②, ③ の連立方程式を解くと (ここでは $\delta = +1$ である)

$$r = \frac{9a\delta m^2}{2\sqrt{2}(E^2 - \sqrt{2}a\delta m)}$$

m, e, a は小さな定数値であるが、概ね $E^2 - \sqrt{2}a\delta m \approx 0$ をならば非常に大きな r となる。つまり、

$$a^2 \approx e^2 \left(1 + \frac{e^2}{2m^2}\right)$$

の絶妙なバランスの場合、スーパファイン リング星を形成する。判別式を 0 とする絶妙なバランスから若干ズレている場合は土星リングや太陽系惑星軌道の要素が混じるファインリングになる。

なお、エネルギー安定式 ③ $S = r\sqrt{3mr/2}$ の代わりに (S1 次オーダー) である

$$S = r\sqrt{r(3mr - 40m^2 + 2e^2)/2(r - 14m)}$$

$$4(E^2 - \sqrt{2}a\delta m)r^2 - m(56E^2 - 47\sqrt{2}a\delta m)r + 6\sqrt{2}a\delta m(20m^2 - e^2) = 0$$

さらに $S = r\sqrt{(3mr^2 - 40m^2r + 2e^2r - 28me^2)/2(r - 14m)}$ (S2 次オーダー) を使うと

$$4(E^2 - \sqrt{2}a\delta m)r^3 - m(56E^2 - 47\sqrt{2}a\delta m)mr^2 + 6\sqrt{2}a\delta m(20m^2 - e^2)r + 84\sqrt{2}a\delta m^2e^2 = 0$$

ファインリング径 r^3, r^2 の 3 次方程式、2 次方程式は微小解を含んでおり、有意解は 1 個である。

このファインリング理論は連星白色矮星の前提条件を必要としない。

第 6 章 楕球惑星系

6・1 楕球惑星系の楕球面軌道と球面数

銀河スケールの大空間では、円盤銀河の回転曲線の解明のための暗黒物質をエネルギー運動量テンソルに織り込む必要があるが、ここでは暗黒物質の影響が無視できる惑星系について検討する。

大質量による時空距離の歪・ブラックホールを表わしたシュバルツシルト解は次のようになっており、 $\sin\theta$ や $d\theta$ 、 $d\varphi$ が現れているので球対称であることが分りにくい。そこで、 (x, y, z) 座標に変換すると (x, y, z) に対する互換性が現われる。

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)(cdt)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)}d\rho^2 - \rho^2 d\theta^2 - \rho^2 \sin^2\theta \cdot d\varphi^2 \quad (\text{参考資料 14, 第 7 部})$$

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2R}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2R}\right)^2}(cdt)^2 - \left(1 + \frac{m}{2R}\right)^4(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad \text{但し、}\rho = R\left(1 + \frac{m}{2R}\right)^2$$

カー解の回転要素要素 a が無い場合、カー解に特有なポイヤール・リンクスト座標は一般座標と一致す

るので、楕球惑星系の解明においては 渦巻惑星系のような近似解でなく厳密解の取り扱いとなる。
 こからは回転要素 a が無い場合、つまり $a=0$ の場合について検討する。

エネルギー極小座標を求めるため 3 ページで次の計算を行った。 $\partial\varepsilon/\partial\theta = 0$ について

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(2m\rho + e^2)a^2}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)^2} + \frac{a^2}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 + a^2 \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 \\ - \left[(\rho^2 + a^2) - \frac{(2m\rho + e^2)2a^2\sin^2\theta}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} - \frac{(2m\rho + e^2)a^4\sin^4\theta}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 \\ + \left[\frac{2(2m\rho + e^2)a}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} + \frac{2(2m\rho + e^2)a^3\sin^2\theta}{(\rho^2 + a^2\cos^2\theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) - 2\frac{\partial D(\rho, \theta)}{\partial\theta} \end{array} \right\} \sin 2\theta = 0$$

特に中心核星の回転がない $a=0$ の場合、上式は

$$\left[-(\rho^2) \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 - 2\frac{\partial D(\rho, \theta)}{\partial\theta} \right] \sin 2\theta = 0$$

これにより $\sin 2\theta = 0$ 。従って $2\theta = 0, \pi, 2\pi$ は $a=0$ についても成立する。

しかし $a=0$ の場合でも θ, φ が出現するが、 θ, φ の原点になるトリガーはないので球対称になっていると想定される。 θ の起点が実在空間では存在しないので、仮想的にどこかを定める。 θ の仮想性はシュバルツシルト解でもわかる。

そうすると時空距離 ds において θ, φ の起点はどこでも良いので $\theta = \pi/2$ とする。この結果 $a=0$ としてもティティウス・ボーデ法則の証明過程で導いた諸計算式を利用することができる。

これから使用する微分方程式の解を以下に記しておく。 (EXP の e と天体定数の e を区別する)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad y \cdot e^{\int P dx} = \int Q e^{\int P dx} dx + K \quad (\text{参考資料 2})$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (4ac - b^2 > 0) \quad (\text{参考資料 1})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \log \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (b^2 - 4ac > 0)$$

$$\int \frac{xdx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{2a} \log(ax^2 + bx + c) - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \log(ax^2 + bx + c) + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{xdx}{(ax^2 + bx + c)^2} = -\frac{bx + 2c}{(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} - \frac{b}{4ac - b^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{(b^2 - 2ac)x + bc}{a(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)} + \frac{2c}{4ac - b^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

$\theta = \pi/2$ の場合であるが、Space Fantasy 微分方程式 2 次オーダは次のように表わされた。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon}{\partial R} R^4 (R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) \\ = mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon \cdot 2R^3(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) \\ + 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2) \delta \sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \\ + \varepsilon \cdot 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm) \delta \sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \end{aligned}$$

上式は $a=0$ の場合でも成立しているので $a=0$ とすると

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial R} R^2 (R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) = m(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon 2R(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dR} + \frac{2(R^2 - 6mR + 4CR + 8m^2)}{R(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)} \cdot \varepsilon = \frac{m(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2)}{R^2(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)}$$

この微分方程式は変数変換することなく、積分公式によって簡単に解ける。

$$\begin{aligned} \int P dx &= 2 \int \frac{R^2 - 6mR + 4CR + 8m^2}{R(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)} dR = 2 \int \left[\frac{2}{R} - \frac{R - 2m}{R^2 - 4mR + 2e^2 + 4m^2} \right] dR \\ &= 2 \cdot \left[2 \log R - \frac{1}{2} \log(R^2 - 4mR + 2e^2 + 4m^2) \right] \\ &= \log \frac{R^4}{R^2 - 4mR + 2e^2 + 4m^2} \\ e^{\int P dx} &= \frac{R^4}{R^2 - 4mR + 2e^2 + 4m^2} \\ Q e^{\int P dx} &= \frac{-m(R^2 - 8mR + 4CR + 12m^2)}{R^2(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)} \cdot \frac{R^4}{(R^2 - 4mR + 2e^2 + 4m^2)} \\ &= \frac{4m^2 R}{R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2} - \frac{mR^2}{R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2} - \frac{8m^2(2m^2 + e^2)R}{(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)^2} \\ &\quad + \frac{2m(4m^2 - e^2)R^2}{(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)^2} \end{aligned}$$

ここで微分方程式の判別式 $\Delta (= 4ac - b^2) = 4(4m^2 + 2e^2) - 16m^2 = 8e^2 > 0$ であるので、

$$\int \frac{dR}{R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2} = \frac{2}{2\sqrt{2}e} \arctan \left(\frac{2R - 4m}{2\sqrt{2}e} \right) = \frac{\pi(1 + 2N)}{2\sqrt{2}e} \quad (R \text{ は充分大きい, } N \text{ は周期})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{RdR}{R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2} &= \frac{1}{2} \log(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2) + 2m \cdot \frac{\pi(1 + 2N)}{2\sqrt{2}e} \\ &= \frac{1}{2} \log(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2) + \frac{m\pi(1 + 2N)}{\sqrt{2}e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{R^2 dR}{R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2} &= R + 2m \log(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2) + \frac{16m^2 - 8m^2 - 4e^2}{2} \cdot \frac{\pi(1 + 2N)}{2\sqrt{2}e} \\ &= R + 2m \log(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2) + \frac{(2m^2 - e^2)\pi(1 + 2N)}{\sqrt{2}e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{RdR}{(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)^2} &= -\frac{-4mR + 8m^2 + 4e^2}{(16m^2 + 8e^2 - 16m^2)(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)} - \frac{-4m}{16m^2 + 8e^2 - 16m^2} \cdot \frac{\pi(1 + 2N)}{2\sqrt{2}e} \\ &= +\frac{mR - 2m^2 - e^2}{2e^2(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)} + \frac{m\pi(1 + 2N)}{4\sqrt{2}e^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{R^2 dR}{(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)^2} &= \frac{(16m^2 - 8m^2 - 4e^2)R - 4m(4m^2 + 2e^2)}{(16m^2 + 8e^2 - 16m^2)(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)} \\ &\quad + \frac{8m^2 + 4e^2}{16m^2 + 8e^2 - 16m^2} \cdot \frac{\pi(1 + 2N)}{2\sqrt{2}e} \\ &= \frac{(2m^2 - e^2)R - 2m(2m^2 + e^2)}{2e^2(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)} + \frac{(2m^2 + e^2)\pi(1 + 2N)}{4\sqrt{2}e^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int Q e^{\int P dx} dx &= 2m^2 \log(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2) + \frac{4m^3 \pi(1+2N)}{\sqrt{2}e} - mR \\
&\quad - 2m^2 \log(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2) - \frac{m(2m^2 + e^2)\pi(1+2N)}{\sqrt{2}e} \\
&\quad - \frac{8m^2(2m^2 + e^2)(mR - 2m^2 + e^2)}{2e^2(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)} - \frac{8m^3(2m^2 + e^2)\pi(1+2N)}{4\sqrt{2}e^3} \\
&\quad + \frac{2m(4m^2 - e^2)\{(2m^2 - e^2)R - 2m(2m^2 + e^2)\}}{2e^2(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)} + \frac{2m(4m^2 - e^2)(2m^2 + e^2)\pi(1+2N)}{4\sqrt{2}e^3} \\
&= -mR + \frac{m(2m^2 + e^2)\pi(1+2N)}{\sqrt{2}e} - \frac{m(2m^2 + e^2)\pi(1+2N)}{2\sqrt{2}e} \\
&\quad + \frac{(-20m^3e^2 + 2me^4)R + 4m^2(8m^4 + 8m^2e^2 + 2e^4 - 8m^4 - 2m^2e^2 + e^4)}{2e^2(R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2)} \\
&= \frac{(-R^2 + 4mR - 14m^2 - e^2)mR + 6m^2(2m^2 + e^2)}{R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2} + \frac{m(2m^2 + e^2)\pi(1+2N)}{2\sqrt{2}e}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon \cdot e^{\int P dR} = \int Q e^{\int P dR} dR + K$$

$$\varepsilon \cdot \frac{R^4}{R^2 - 4mR + 2e^2 + 4m^2} = \int Q e^{\int P dR} dR + K$$

$$\varepsilon = \frac{R^2 - 4mR + 4m^2 + 2e^2}{R^4} \left[\int Q e^{\int P dR} dR + K \right]$$

エネルギー極大・極小の軌道を求めるため ε を R で偏微分する。

$\partial\varepsilon/\partial R = 0$ 、これは微分方程式から既に得られている。つまり

$$\frac{2(r^2 - 6mr + 4e^2 + 8m^2)}{r(r^2 - 4mr + 2e^2 + 4m^2)} \cdot \varepsilon = \frac{m(-r^2 + 8mr - 4e^2 - 12m^2)}{r^2(r^2 - 4mr + 2e^2 + 4m^2)}$$

$$\varepsilon = \frac{m(-r^2 + 8mr - 4e^2 - 12m^2)}{2r(r^2 - 6mr + 4e^2 + 8m^2)}$$

$$\varepsilon = \left[\int Q e^{\int P dr} dr + K \right] \frac{r^2 - 4mr + 12e^2 + 4m^2}{r^4} = \frac{m(-r^2 + 8mr - 4e^2 - 12m^2)}{2r(r^2 - 6mr + 4e^2 + 8m^2)}$$

従って中心核星の系に共通である積分定数 K は

$$K = \frac{mr^3(-r^2 + 8mr - 12m^2 - 4e^2)}{2(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2)} - \int Q e^{\int P dr} dr$$

$$= \frac{mr^3(-r^2 + 8mr - 12m^2 - 4e^2)}{2(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2)}$$

$$+ \frac{(r^2 - 4mr + 14m^2 + e^2)mr - 6m^2(2m^2 + e^2)}{r^2 - 4mr + 4m^2 + 2e^2} - \frac{m(2m^2 + e^2)\pi(1+2N)}{2\sqrt{2}e}$$

$$\frac{2K}{m} = \frac{\left[\begin{array}{l} r^3(-r^2 + 8mr - 12m^2 - 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 2e^2) \\ + 2r(r^2 - 4mr + 14m^2 + e^2)(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2) \\ - 12m(2m^2 + e^2)(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2) \end{array} \right]}{(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 2e^2)}$$

$$\frac{(2m^2 + e^2)\pi(1 + 2N)}{\sqrt{2}e}$$

$$= F - \frac{(2m^2 + e^2)\pi(1 + 2N_1)}{\sqrt{2}e}$$

K は共通であるので、基準軌道を N_1 , r_1 として、 $N - N_1 = n - 1$ とする。

$$\left[\begin{array}{l} r^3(-r^2 + 8mr - 12m^2 - 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 2e^2) \\ + 2r(r^2 - 4mr + 14m^2 + e^2)(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2) \\ - 12m(2m^2 + e^2)(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2) \end{array} \right]$$

$$\frac{\quad}{(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 2e^2)}$$

$$= F - \frac{\sqrt{2}(2m^2 + e^2)\pi(n - 1)}{e} \quad (n \text{ は周期差})$$

また、楕球面の方程式は (x, y, z) 座標で $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ と表される。上記の多項式は $\theta = \pi/2$ とした楕球面の第 1 成分を表現したものにすぎないが、この座標を原点として、さらに $\pi/2$ 移動すると第 2 成分が出てくる。さらに $\pi/2$ 移動すると第 3 成分の方程式が出てくることで、 (x, y, z) 楕球面の方程式が成立する。

F は上式で $r=r_1$ とすることによって正確に求められる。上式は エネルギー極大・極小である自然数 n (変数) の係数の付いた n 周期差目の r^7 多項式であるので、楕球惑星系においてはエネルギー極小である最大 4 個 \times 周期差 n の楕球面が存在し、その楕球面内に軌道があることになる。

(r の複素数根・マイナス根・重根、中心核星の膨らみによって、実際の r のプラス根は減る。)

なお、惑星の回転方向に関わる δ が $a=0$ としたことで消滅しているので、惑星の回転方向は軌道に影響しない。

6・2 シュバルツシルト時空の惑星系

計算の戯れになってくるようだが、計算を更に単純化して、 $a=0$, $e=0$ の場合、つまりシュバルツシルト時空における Space Fantasy 微分方程式とその解は次のように表される。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} R^2 (R^2 - 4mR + 4m^2) = m(-R^2 + 8mR - 12m^2) + \varepsilon \cdot 2R(-R^2 + 6mR - 8m^2)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dR} + \frac{2(R-4m)}{R(R-2m)} \cdot \varepsilon = \frac{-m(R-6m)}{R^2(R-2m)} \quad \text{と変形できる。}$$

$$\varepsilon = \frac{-m(R^3 - 6mR^2 + 24m^2R - 24m^3)}{R^4} + \frac{(R-2m)^2 K}{R^4}$$

エネルギー極大・極小の軌道を求めるため ε を R で偏微分する。 $\partial \varepsilon / \partial R = 0$ より、また、積分定数 K は系に共通であるので

$$\frac{2K}{m} = \frac{r^3 - 12mr^2 + 72m^2r - 96m^3}{(r-2m)(r-4m)} = \frac{r_1^3 - 12mr_1^2 + 72m^2r_1 - 96m^3}{(r_1-2m)(r_1-4m)}$$

$$F = \frac{r_1^3 - 12mr_1^2 + 72m^2r_1 - 96m^3}{(r_1-2m)(r_1-4m)} \quad \text{と置くと}$$

$$\frac{r^3 - 12mr^2 + 72m^2r - 96m^3}{(r-2m)(r-4m)} = F$$

上式はエネルギー極大・極小である遠日・近日点距離に関する r^3 の多項式であり。 θ の基準の移動によって 6・1 の考察と同様に楕球面になるので、エネルギー極小である最大 2 個の楕球面が存在し、その楕球面内に軌道があることになる。

第 7 章 自由軌道

前章まではエネルギー安定な究極的軌道について検討してきたが、本章ではエネルギー的に未だ安定ではない過渡的な自由軌道、具体例として人工衛星のような自由軌道について検討する。

その前提として、中心核星は楕球でなく 質点と同等とみなされるような正球とする。

「1.3 変分原理による時間成分」によって、中心核星の回転が遅い場合の近似カー・ニューマン解をオイラー・ラグランジュ方程式に入れることで、次のように表すことができた。

$$\text{時間成分} \quad \frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) - \frac{a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \right] = 0$$

$$\theta \text{ 成分} \quad \frac{d}{ds} \left[\rho^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right) \right] - \rho^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta \left(\frac{cdt}{ds} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = 0$$

$$\varphi \text{ 成分} \quad \frac{d}{ds} \left[\rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) + \frac{a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) \right] = 0$$

時間成分を積分すると

$$\left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) - \frac{a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = k$$

φ 成分を積分すると

$$\rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) + \frac{a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left(\frac{cdt}{ds} \right) = h$$

これにより

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)}{\left(\frac{dt}{ds} \right)} = \frac{J \left(\rho - 2m + \frac{e^2}{\rho} \right) + a \left(\frac{e^2}{\rho} - 2m \right)}{\left[\rho^3 + Ja \left(2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \right] \sin^2 \theta} \cdot c \quad J = \frac{h}{k} \text{ とする。}$$

また、「1.2 エネルギー方程式の導入」によって、

$$\begin{aligned} -2\varepsilon &= \frac{2m\rho + e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt} \right)^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{cdt} \right)^2 \\ &\quad - \left[(\rho^2 + a^2) \sin^2 \theta - \frac{(2m\rho + e^2)a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right)^2 + \frac{2(2m\rho + e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\varphi}{cdt} \right) \end{aligned}$$

上記両式から cdt を消去すると

$$\begin{aligned} & (d\rho)^2 + (\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2)(d\theta)^2 = \\ & \left\{ \begin{aligned} & [2\varepsilon(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) + 2m\rho + e^2] \left(\frac{[\rho^4 + Ja(2m\rho - e^2)] \sin^2 \theta}{J(\rho^2 - 2m\rho + e^2) - a(2m\rho - e^2)} \right)^2 \\ & + 2a(2m\rho + e^2) \sin^2 \theta \left(\frac{[\rho^4 + Ja(2m\rho - e^2)] \sin^2 \theta}{J(\rho^2 - 2m\rho + e^2) - a(2m\rho - e^2)} \right) \\ & - (\rho^2 + a^2)(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta - (2m\rho + e^2)a^2 \sin^4 \theta \end{aligned} \right\} \times \frac{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} (d\varphi)^2 \end{aligned}$$

上記は 2 次オーダであるので、0 次オーダで表す。

$$(J\rho - 2am)^2 [(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2] \\ = [2\varepsilon(2amJ \sin^2\theta + \rho^3)^2 + \rho^3(-J^2\rho \sin^2\theta + 8amJ \sin^2\theta + 2m\rho^2)](d\varphi)^2$$

ここでは 0 次オーダであるので e^2 は現れないのが特徴である。

なお、 $\theta = \pi/2$, $a = 0$ とすると次式となり、これはケプラー・ニュートン楕円軌道の微分方程式に他ならない。

$$J^2(d\rho)^2 = [2\varepsilon\rho^2 - J^2 + 2m\rho] \rho^2(d\varphi)^2$$

太陽系惑星を考えると、太陽自身の自転運動によって a が生じており、また自転の遠心力によって赤道面が膨らんでいる。地球も同様に真円の球体でなく赤道面が膨らんでいる。人工衛星等の精密軌道を考える場合、地球などを楕球として捉える必要がある。そこで楕球を微小質点の集合体として考え、3 組の座標の座標変換を行う。3 組の座標の相互関係は単純に平行移動しており、回転はない。

	デカルト座標	極座標
楕球の原点を基準とした時空の座標	(x, y, z)	(λ, μ, ν)
楕球の原点を基準とした微小質点の座標	(ξ, η, ζ)	(χ, α, β)
微小質点を基準とした時空の座標	(X, Y, Z)	(ρ, θ, φ)

各座標の相互関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= \xi + X & \lambda \sin \mu \cos \nu &= \rho \sin \theta \cos \varphi + \chi \sin \alpha \cos \beta \\ y &= \eta + Y & \lambda \sin \mu \sin \nu &= \rho \sin \theta \sin \varphi + \chi \sin \alpha \sin \beta \\ z &= \zeta + Z & \lambda \cos \mu &= \rho \cos \theta + \chi \cos \alpha \end{aligned}$$

上式から (λ, μ, ν) , (χ, α, β) を使って (ρ, θ, φ) を表す。

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (\lambda \cos \mu - \chi \cos \alpha)^2 + (\lambda \sin \mu \sin \nu - \chi \sin \alpha \sin \beta)^2 + (\lambda \sin \mu \cos \nu - \chi \sin \alpha \cos \beta)^2 \\ &= \lambda^2 + \chi^2 - 2\lambda\chi [\cos \alpha \cos \mu + \sin \alpha \sin \mu \cos(\beta - \nu)] \end{aligned}$$

$$\cos^2\theta = \frac{(\lambda \cos \mu - \chi \cos \alpha)^2}{\rho^2}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{(\lambda \sin \mu \sin \nu - \chi \sin \alpha \sin \beta)^2}{\rho^2 - (\lambda \cos \mu - \chi \cos \alpha)^2}$$

次に ρ^2 , $\cos^2\theta$, $\sin^2\varphi$ の式を微分して $(d\rho, d\theta, d\varphi)$ を出して、0 次オーダの自由軌道微分方程式に代入し、楕球の微小体積 $d\xi d\eta d\zeta = \chi^2 \sin \alpha d\chi d\alpha d\beta$ について積分することになるが、手計算で理論解析を進めることは困難であるようだ。

第 8 章 ま と め

ティティウス・ボーデ法則は 250 年前に発見されたが、現代まで物理的な証明ができなため、これは力学的な必然ではなく偶然だという考え方が主流となっている。しかし、著者は本文頭に示した手順によってこの法則を初めて証明し「天文学 250 年の謎を解く」とともに、土星のリングが最大 31 個あることを同じ Space Fantasy 微分方程式から物理学的に導き出した。

アインシュタイン方程式のカー・ニューマン解については、ブラックホール脱毛定理 (no-hair theorem) において、すべての現実的なブラックホールは、いずれ、角運動量・質量・電荷の 3 つの物理量のみ

を持つカー・ニューマンブラックホールに落ち着くと考えられている。また、「アインシュタイン・マクスウェル方程式での軸対称定常解は、カー・ニューマン解に限られる」というブラックホール唯一性定理 (uniqueness theorem) も存在する。(参考資料 10)

このように、本解析は、成熟した銀河において安定した定常解であるカー・ニューマン解を利用しているため、成熟していない まだ若い遷移的銀河に適用できない。

本解析で 4 個の重要な式は次の通りである。

次式は、成熟した銀河の安定した定常解のカー・ニューマン解に従い、太陽系のみならず宇宙の惑星及びリング星に適用できる基礎微分方程式である。しかし、基礎微分方程式の近似解は多数ある。 $\delta = \pm 1$ は軌道と中心核星の回転方向に関わるものである。

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dR} R^4 (R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) \\ = mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon \cdot 2R^3(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) \\ + 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \\ + \varepsilon \cdot 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \quad C = e^2/R \quad (R \text{ 2ry order}) \end{aligned}$$

次式は、基礎微分方程式の 1 個のエネルギー安定近似解であり、太陽系惑星のみならず、現在約 4000 個発見されている系外惑星のうち安定惑星の多くに適用できる。しかし、中心星に捕捉された彗星のようにまだ若く不安定な星・リングはもともと基礎微分方程式の対象外である。

$$\xi = \left[1 - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[\frac{4am\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \right] + \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}}$$

次式は、基礎微分方程式の 1 個のエネルギー安定近似解であり、土星リングや海王星リングのみならず、太陽系外のリング星のうち安定リング星の多くに適用できる。リングは最大 31 個ある。

$$Qr^2 (Pr^2 - Q[F(1-\lambda)r^2 - 2E^4])^2 - 4a^2 m^2 P(2Qr^2 + 5P)^2 = 0$$

中心核星の 3 要素定数が特別に絶妙バランスする場合 スーパーファイン リング星が形成される。

$$r = \frac{9a\delta m^2}{2\sqrt{2}(E^2 - \sqrt{2}a\delta m)}$$

質点の中心核星に関わるエネルギー的に安定ではない自由軌道の方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (J\rho - 2am)^2 [(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2] \\ = [2\varepsilon(2amJ \sin^2\theta + \rho^3)^2 + \rho^3(-J^2\rho \sin^2\theta + 8amJ \sin^2\theta + 2m\rho^2)](d\varphi)^2 \end{aligned}$$

また、Space Fantasy 微分方程式 2 次オーダを用いて渦巻惑星系、楕球惑星系等の中心核星からの遠日・近日点距離は、理論体系的に中心核星の質量要素 m 、回転要素 a 、電荷要素 e によって次のように整理される ($m \neq 0$)。

なお、これは渦巻惑星系の場合 Space Fantasy 微分方程式の近似解であり、 a の宇宙時間的減衰を考慮すると時系列的に楕球惑星系は晩期形態とも考えられる。

$$\left. \begin{array}{ll} a \neq 0 & e^4 + 2e^2 m^2 - 2a^2 m^2 < 0 \quad r^{35} \text{ 群多項式の解} \quad (\text{例: 土星のリング}) \\ a \neq 0 & e^4 + 2e^2 m^2 - 2a^2 m^2 > 0 \quad \text{周期解 SF ティティウス式} \quad (\text{例: 太陽系惑星}) \\ a = 0 & e \neq 0 \quad \text{周期解の周期差 } n \times r^7 \text{ 多項式の解} \\ a = 0 & e = 0 \quad r^3 \text{ 多項式の解} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{渦巻惑星系} \\ \text{楕球惑星系} \end{array}$$

本理論は一極中心核星の天空惑星系に適用されるものの、回転する中心核星に近いバルジ相応の空間で不適であるほか、ダーク体のエネルギー運動量テンソルを考慮すべき銀河系に適用できない。

【参考】 解析解と数値解

これまでエネルギー極小軌道を決定するために、軌道の特徴を明確にする Space Fantasy 微分方程式 (質量要素 m 、回転要素 a 、電荷要素 e を含む) を導き出し、初等関数の解析解を得るように努めた。

しかし、この方法によらず数値的に軌道を計算する方法がある。SF 微分方程式を導出する際に 軌道半径 R はエネルギー ε と角運動量相当 J の関数 $R=R(\varepsilon, J)$ であり、 R を ε で偏微分した。

一方、 $R=R(\varepsilon, J)$ から $J=J(R, \varepsilon)$ が出るので、形式的にこの J を ε で偏微分すると $0=H(R, \varepsilon, dR/d\varepsilon)$ になる。これからエネルギー極小軌道は $0=H(R, \varepsilon_{min}, 1/0)$ である。

また、 $0=H(R, \varepsilon, dR/d\varepsilon)$ を ε で積分すると積分定数 $K=J(R, \varepsilon_{min})$ に戻る。

$0=H(R, \varepsilon_{min}, 1/0)$ と $K=J(R, \varepsilon_{min})$ から ε_{min} を消去すると R と K の関係式が得られる。

しかしながら、このベキ乗代数式の数値解から軌道の特徴は判り難い。また、解析解が 10^7 個(ティティウス・ボーデ証明の N_1)や土星リングの線条軌道数あるのに対して、ベキ乗代数式の解の個数が少なすぎる。数値解と解析解の食い違いは各々の微小項省略が異なるためである。基本的に数値解方式では微小項を省略することは適切でない。一方、変動率に着眼した微分方程式の解析解方式は、微小項の大きな変動も加味された上での微小項省略であるので、変動要素を短い数式で上手く表している。なお、数値解法の具体的な計算として、

$$J = \frac{4am + R\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}} R^2 \quad \delta = \pm 1 \quad C = e^2/R$$

よって 積分定数 K

$$K = \frac{4am + R\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}} R^2$$

となる。この K は全ての軌道について共通であるので、積分定数 K つまり $K=J(R, \varepsilon_{min})$ はニュートン力学の角運動量相当の保存則に他ならない。

また エネルギー極小軌道

$$0 = \lim \left(\frac{d\varepsilon}{dR} \rightarrow 0 \right) \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} \frac{4am + R\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}} R^2 \right\}$$

上式の積分定数とエネルギー極小軌道を連立させて数値的に解くことになる。

【参考】 $E=E(r, s)$ 微分 3 様の意味・用途

① $dE(r, s) = 0$ $E(R, S) = K$ エネルギーが一定 K である軌道。

② $dE = \partial E(r, s)/\partial r \cdot dr + \partial E(r, s)/\partial s \cdot ds = 0$ $dr/ds = -\partial E(r, s)/\partial s / \partial E(r, s)/\partial r$
 $R=R(S, K)$ エネルギー増分が 0(極値)である特性微分方程式 dr/ds の軌道解。

完全微分方程式 dr/ds の厳密解は $E(R, S) = K$ であるが $E(R, S) = K$ を単純に代数計算しても複雑な高次数の多項式集合体になり、関数論的な軌道の特性は不明である。これに対し特性微分方程式は微小項を削除し、特徴を際立たせる。

具体的イメージとして、エネルギーがウネリ(大波)変動とサザナミ(小波)変動から構成されている場合、大局的なエネルギー変動の視点からサザナミ変動は大波に埋没し微小項として無視される。しかし、短時間に小刻みに変動する微細なエネルギー軌道に着目する場合、その変化速度(特性微分方程式)への影響が小さい緩慢なウネリ大波の微小項は省略できる。

これが完全微分方程式の解と特性微分方程式の解の違いである。

③ $\partial E(r, s)/\partial r = 0$ $\partial E(r, s)/\partial s = 0$ の連立 (R, S) エネルギーが極値であるポイント座標。

べき乗多項式の微小解と遠方解

① 低次数項の係数が小さい場合の微小解

$$(x^2 + ax + b)(x + \theta)(x + \xi) = 0 \quad \theta, \xi ; \text{微小}$$

$$x^4 + (a + \theta + \xi)x^3 + (\cancel{a\theta} + \cancel{a\xi} + \theta\xi + b)x^2 + (\cancel{a\theta\xi} + b\theta + b\xi)x + b\theta\xi = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad \text{--- } A, B : \text{同程度に大きい } C, D : \text{小さい}$$

$$\text{つまり } a = A, \quad b = B, \quad B\xi^2 - C\xi + D = 0$$

$$\text{微小 } \theta, \xi = [C \pm \sqrt{C^2 - 4BD}] / 2B \doteq [\pm \sqrt{-D/B}] \quad x = -\theta, -\xi$$

$$(x^2 + Ax + B)(x + \theta)(x + \xi) \doteq 0 \quad \dots \dots C, D \text{ は省略可}$$

② 高次数項の係数が小さい場合の遠方解

$$(x^2 + ax + b)(x + \theta)(x + \xi) = 0 \quad \theta, \xi ; \text{遠方大}$$

$$x^4 + (\cancel{a} + \theta + \xi)x^3 + (\cancel{a\theta} + \cancel{a\xi} + \theta\xi + \cancel{b})x^2 + (a\theta\xi + \cancel{b\theta} + \cancel{b\xi})x + b\theta\xi = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad \text{--- } B, C, D : \text{同程度に大きい } A : \text{小さい}$$

$$\text{つまり } a = C/B, \quad b = D/B, \quad \xi^2 - A\xi + B = 0$$

$$\text{遠方 } \theta, \xi = [A \pm \sqrt{A^2 - 4B}] / 2 \doteq [\pm \sqrt{-B}] \quad x = -\theta, -\xi$$

$$(Bx^2 + Cx + D)(x + \theta)(x + \xi) \doteq 0 \quad \dots \dots A \text{ は省略可}$$

参考資料

- (1) 高等数学公式便覧：朝倉書店(株)、河村哲也監訳 井元薫訳 (p103)
- (2) 解析学概論：裳華房(株)、矢野健太郎 石原繁 (p16)
- (3) 相対論：共立出版(株)、平川浩正 (p117)
- (4) 一般相対性理論入門：(株)ピアソン・エデュケーション、エドウィンFテイラー・ジョン・ア・アーチボルドホイラー著 牧野伸義訳 (p272)
- (5) Winn & Fabrycky (2015). "The Occurrence and Architecture of Exoplanetary Systems". *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 53
- (6) カーブラックホールの幾何学：共立出版(株)、バレットオニール著 井川俊彦訳 (p64)
- (7) インターネット EMAN の物理学・量子力学・摂動論
- (8) インターネット Wikipedia 変分原理
- (9) インターネット Wikipedia リッカチ微分方程式
- (10) インターネット Wikipedia ティティウス・ボーデ法則 (2017.8 に内容変更された)
- (11) インターネット Wikipedia カー・ニューマン解
- (12) インターネット カー解の導出1
- (13) インターネット カー解の導出2～ボイヤー・リンクスト座標～
- (14) インターネット カー解の性質～時空の引きずり～ (p2 , p3)
- (15) インターネット 裏EMAN の相対性理論 第1部 特殊相対論 ～ 第7部 自由研究 (C7 p6)
- (16) インターネット Wikipedia Boyer-Lindquist coordinates
- (17) インターネット General Relativity, Black Holes and Cosmology (p200) Andrew J, S. Hamilton
- (18) インターネット ブラックホール脱毛定理
- (19) インターネット 土星の輪！あまり知られていない真実と新発見 17
- (20) インターネット ハッブルの音叉図

- (21) 日本天文学会 2017 年秋季年会 講演予稿集 犬山文孝
 2018 年春季年会 講演予稿集 Based on the theory of relativity, the demonstration of the Titius-Bode law and the calculation of the Saturn ring orbits and the number of its rings
- (22) 日本惑星科学会 2019 年秋季講演会 講演予稿集 犬山文孝
 相対論カー・ニューマン解を利用した 太陽系惑星軌道ティティウス・ボーデ法則, 土星リング個数 および ファインリング径 の導出

謝 辞

連名者の少女期を育んだ懐かしい大自然の地において、本資料の概要を 2017 年 9 月 日本天文学会 秋季年会（開催地：北海道大学）で発表できたことを感慨深く思う。

専門学校から学問の府へ編入学を許された東北大学工学部横堀武夫教授、数式の美学を説かれた同学渥美光教授、研究の苦悩と歓びを導かれた東京大学大学院生産技術研究所大井光四郎教授に、また趣味の企業経営や子飼ひ・太鼓持ち茶坊主人事が横行する中、仕事の模範的明鏡であった西日本技術開発(株)大田信一常務取締役、新エネルギー財団の前任者でもあり責任ある独創的新規事業を見守られた九電産業(株)松田憲明常務取締役に、および世界の 3 大洋を縦横無尽に航海し国際感覚で家族を養育した犬山正・フミの両親に、そしてロシア語に堪能で中国 大連市から G12 引揚げ団長等の不遇に打ち克ち感謝の気持ちを生涯忘れない谷口寅雄・敏子の両親に、人生の謝意を表わすものである。本当に本当に有り難うございます。 & 世界の人々・組織体が博愛でありますように。国・会社・自治体・地域などの組織体のためでなく、人々のために を良しとする。

おおむね、ティティウス・ボーデ法則から 250 年、一般相対性理論から 100 年、カー・ニューマン解から 50 年、幸運にも良いテーマ・良い資料・楽しい時間・美味しい食事・ギリギリの老創造力に恵まれ、“ SF (Sayuri Fumitaka) ” の星をつかんだようだ。この宇宙で数奇な存在である 貴重な Fine Ring をサファイア指輪の代品として共同著者に捧げます。

著者経歴

犬山 文孝

- ・九州電力(株) 営業開発部課長
- ・九州電力(株) 事業開発部課長
- ・(財)新エネルギー財団 地熱本部技術環境部長（東京単身赴任 8 年）
- ・九州電力(株) 火力部副部長
- ・九電産業(株) 環境部新規事業担当部長
- ・九電産業(株) 環境部 O B （著者連絡窓口）
- ・喜寿をめざす republican 老自由人・計算愛好者

谷口 佐由利

- ・昭和女子大学 副手
- ・三菱電機商品販売(株) 大阪営業所
- ・火力原子力発電技術協会 九州支部
- ・中学教員・栄養士・介護士
- ・喜寿をめざす老自由人・星空愛好者



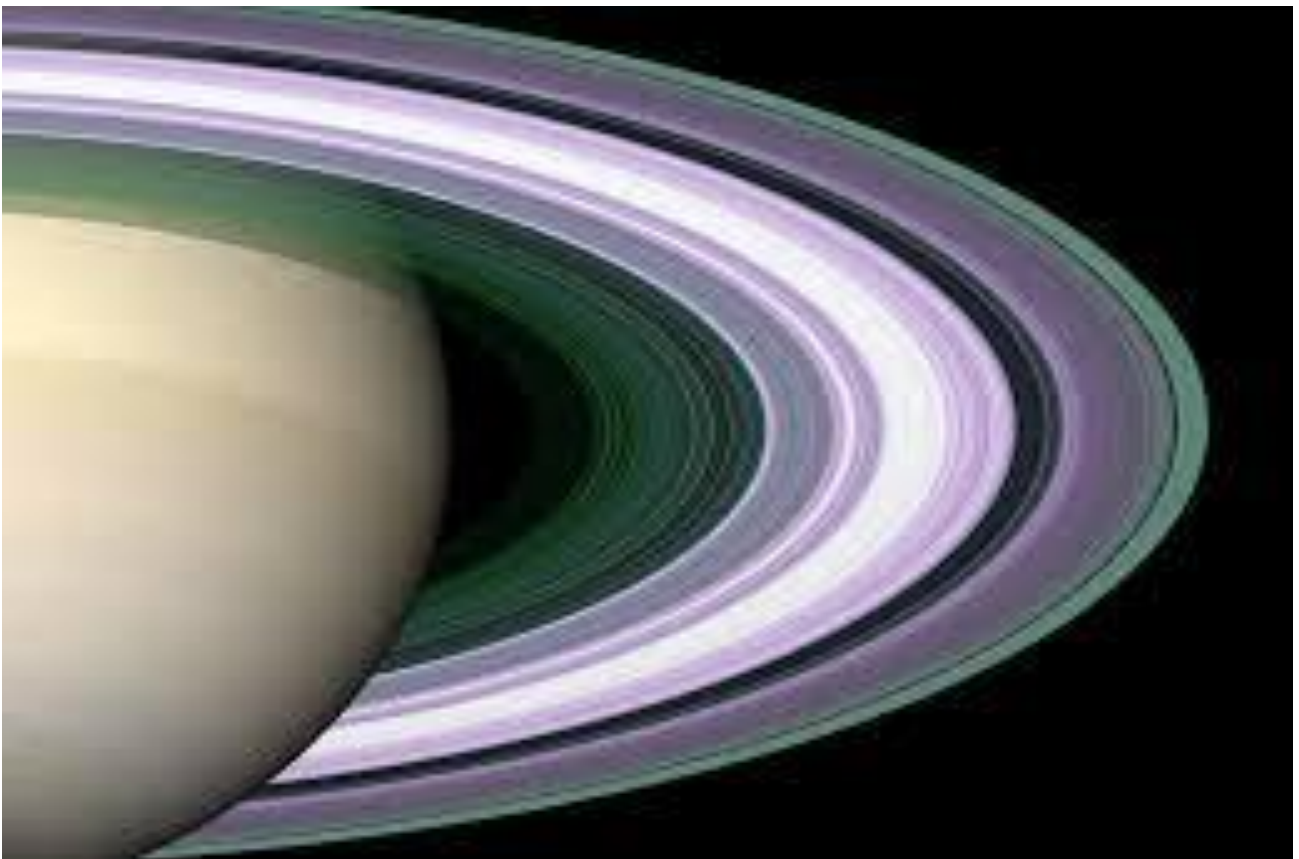
渦巻銀河（関連ページ 4）



楕円銀河（関連ページ 34）



太陽系惑星（関連ページ 23）



土星のリング（関連ページ 28）

以上写真出典：NASA



宇宙のファインリング(関連ページ 30)

ヨーロッパ南天天文台 (ESO) が 2011 年 8 月に公開したファインリング星雲 (Fine Ring nebula)。

「Shapley 1」とも呼ばれる惑星状星雲の特異例で、太陽に似た星の死後に形成される。外層が膨張して赤色巨星へと変貌した終末期の恒星は、ガスの外層を宇宙空間へと徐々に放出する。残された中心核「白色矮星」が殻状の残骸に囲まれると、このような姿となる。惑星状星雲は球状、楕円状、対称的な両極構造が一般的だ。輪のような風変わりな形状は、連星が白色矮星となった場合に生まれるという。Image courtesy ESO

インターネット：リング状の特異な惑星状星雲 | ナショナルジオグラフィック日本版サイト

natgeo.nikkeibp.co.jp/nng/article/news/14/4682/

Fine Ring Nebula — captured here by the ESO Faint Object Spectrograph and Camera mounted on the New Technology Telescope at the La Silla Observatory in Chile.^[1] Credit ESO.

著者意見 浅はかな著者の勉強不足かもしれませんが、

ESO は風変わりなリングを説明するために、連星矮星を設定せざるを得なかったのではないかと、連星白色矮星の兆しは何所に有るのだろうか！著者のファインリング説では連星を必要としない。