

# (大要) 相対論カー・ニューマン解により惑星軌道ティティウス・ボーデ法則の証明

犬山 文孝 元 九電産業(株)環境部部長

谷口 佐由利 星空愛好者 L Senior Power Engineer

太陽系外惑星は1995年に初めて観測され、現在では5000個以上の惑星が発見されている。太陽系惑星軌道の配置に関する美しいティティウス・ボーデ法則は1766年に発見された。しかし、その惑星配置のルールはまだ物理的に証明されていない[1]。このため、ティティウス・ボーデ法則は経験則として扱われている。

惑星軌道は、しばしば運動エネルギーと普遍的な重力を加味したニュートン力学によってしばしば計算される。しかし、ニュートン力学ではティティウス・ボーデ法則はうまく説明できない。惑星の軌道を支配する他の要素として、一般相対性理論(1915年に発見)のカー・ニューマン解(1965年に発見)によって導入された電荷と角運動量がある。カー・ニューマン解を使って太陽系外惑星の配置とティティウス・ボーデ法則が数学的に証明される。

## 1. はじめに

無毛定理は、一般相対性理論におけるアインシュタイン・マクスウェル重力方程式と電磁気学方程式のすべての定常ブラックホール解は、質量・電荷・角運動量の3つの独立した外部観測可能な古典的パラメータによってのみ完全に特徴付けられると述べている[2]。つまり、ブラックホール無毛定理は、「アインシュタイン・マクスウェル方程式での軸対称定常解は、カー・ニューマン解に限られる」。しかし、ブラックホール無毛定理が仮定しているのは、アインシュタイン・マクスウェル方程式であるので、その他の場(スカラー場や非可換場、宇宙項その他の組み合わせ)を仮定すれば、他の「毛」が生えることになる。←(no hair theorem-Wikipedia<sup>2024</sup>)。このように厳密に言えば、カー・ニューマン解は新たに拡張された無毛定理を満足しないが、大局的な近似としてニュートン力学より有用である。

太陽系惑星の配置、すなわちティティウス・ボーデ法則( $\xi = 0.4 + 0.3 \times 2^n$ )は250年前に発見されたが、まだ物理的に証明されていない。一方、一般相対論は100年以上前に発見された。また、質量・電荷・角運動量のパラメータを持っているカー・ニューマン解は一般相対論の厳密解であり、50年以上前に発見された。本文ではカー・ニューマン解とエネルギー最小原理等を用いて、ティティウス・ボーデ法則と太陽系外惑星の配置を物理的に証明する。

## 2. エネルギー方程式

本解析の前提条件は、一般相対論カー・ニューマン解(エネルギー運動量テンソル=0)の前提条件のほかに次の2つである。

- ① 調査対象の空間座標は原点の惑星系の中心核星の近傍ではなく、中心核星から充分離れている。
- ② 中心核星の回転はそれほど速くなく、相対性理論カー解に特有なボイヤー・リンクスト座標は  $a/\rho$  の1次オーダーで、一般球座標と同等になる[3]。

厳密なカー・ニューマン解はボイヤー・リンクスト座標を用いて次のように表される[4]。  $ds^2, R^2 \Delta, dt$  はボイヤー・リンクスト記号である。

$$ds^2 = -\frac{R^2 \Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{R^2 \Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{R^4 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( d\phi - \frac{a}{R^2} dt \right)^2$$

半径  $r$  が大きくなると、ボイヤー・リンクスト座標の近似化によって、ここからは、記号をボイヤー・

リンクスト座標から普通の極座標に変える。

一般相対論のアインシュタイン方程式を厳密に解き中心核星の質量要素  $m$ 、回転要素  $a$  と電荷要素  $e$  を織り込んだ近似カー・ニューマン解は (式1) である。

$$(1) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m\rho - e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) (cdt)^2 - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho + e^2} d\rho^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ - \left[ (\rho^2 + a^2) + \frac{(2m\rho - e^2)a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2(2m\rho - e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} cdt \cdot d\varphi$$

特殊相対論のミンコフスキー時空に関わるローレンツ変換係数 (=  $cdt/ds$ ) はエネルギー式  $E = Mc^2 = M_0 \gamma c^2$  の根原であるように、 $\gamma$  の拡張である一般相対論の  $\Gamma (= cdt/ds)$  もエネルギー式の根原である。エネルギー式は  $E = \Gamma(\rho, \theta, \varphi, t, -m, a, e)$  となり、 $E$  には支配的な質量エネルギー  $M_0 c^2$  が含まれるので、 $1/E^2 = 1 - 2\varepsilon$  (エネルギー最小  $dE = 0 = d\varepsilon$ ) に変数変換する。(eq.2)

$$(2) \quad -2\varepsilon = \frac{2m\rho + e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 \\ - \left[ (\rho^2 + a^2) - \frac{(2m\rho + e^2)a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 + \frac{2(2m\rho + e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)$$

エネルギー  $\varepsilon(\rho, \theta, \varphi, t)$  が極小となる座標を求めるため、 $\partial\varepsilon/\partial\theta = 0$  を計算すると、結果として回転の遅い**中心核星の回転軸の赤道面 ( $\theta = \pi/2$ )**において  $E, \varepsilon$  は極小となり、惑星はエネルギー的に**安定な赤道面に集まる**。この結論は渦巻銀河の周辺部ディスクについても成立する。

### 3. 変分原理による時間成分

中心核星の回転が遅く、近似カー・ニューマン解を  $a/\rho$  の1次オーダーで展開して、これを変分問題としてオイラー・ラグランジュ方程式[5]に入れる。

$$\int \left[ \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}\right) \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - \rho^2 \left\{ \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \right\} \right. \\ \left. - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho}\right) \sin^2 \theta \left(\frac{cdt}{ds}\right) \left(\frac{d\varphi}{ds}\right) \right] ds = 0$$

これによって、エネルギー的に安定な中心核星の赤道面で (式3) が得られる。以下  $\theta = \pi/2$  とする。

$$(3) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)}{\left(\frac{dt}{ds}\right)} = \frac{J\left(\rho - 2m + \frac{e^2}{\rho}\right) + a\left(\frac{e^2}{\rho} - 2m\right)}{\rho^3 + Ja\left(2m - \frac{e^2}{\rho}\right)} \cdot c \quad J: \text{角運動量相当}$$

遠日点・近日点距離  $R$  でのエネルギーと(式3)によって  $J$ (角運動量相当)は、 $R$  の2次オーダーまで採用すると(式4)になる。

$$(4) \quad J = \frac{4am + R\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}} R^2$$

ここで、 $\delta = \pm 1$   $C = e^2/R$  としている。 $\delta$  は軌道と中心核星の回転方向に関わるものである。

ここで距離記号の説明をしておく。

$\rho$ : 3次元又は2次元座標における任意の軌道距離

$R$ : 中心核星の赤道面における遠日点・近日点距離

$r$ : 赤道面におけるエネルギー的に安定な遠日点・近日点距離

#### 4. 微分方程式とその解

$R, \varepsilon, J$  の関係は、角運動量相当 (式 4) を変形すると (式 5) になる。

$$(5) \quad 0 = 2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} - R^2 \left[ \frac{J \left( R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left( \frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left( 2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right] + \frac{4a}{R} \left( m + \frac{e^2}{2R} \right) \left[ \frac{J \left( R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left( \frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left( 2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right]^2$$

惑星軌道  $R$  はエネルギー  $\varepsilon$  と角運動量相当  $J$  から決まるので  $R = R(\varepsilon, J)$  である。(式 4) の  $R$  を  $\varepsilon$  で偏微分し、 $\partial R / \partial \varepsilon$  の逆数を採ると (式 6) になる。

$$(6) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} [R^3 + Ja(2m - C)]^2 = \frac{(m + C)[R^3 + Ja(2m - C)]^2}{R^2} + \frac{[J(R - 2m + C) - 2am + aC] [J(R - 2m + C) + 3aC] \cdot R}{1} + \frac{2R^2[J(R - 2m + C) - 4am] [J^2a(m - C) - JR^2(R - 3m + 2C) + aR^2(3m - 2C)]}{R^3 + Ja(2m - C)}$$

ここで (式 4)  $J$  を (式 6) に代入し、 $R$  の 2 次オーダーまで採用すると、 $\varepsilon$  と  $R$  の関係は (式 7) になる。

$$(7) \quad \frac{d\varepsilon}{dR} R^4 (R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) = mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon \cdot 2R^3(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) + 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} + \varepsilon \cdot 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \quad C = e^2/R \quad (R \text{ 2 次オーダー})$$

この微分方程式を解くために、変数変換  $S = R\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}$  を行くと (式 8) になるが、これは初等数学では解けない。 $6a\delta m S^2/R^5$  は  $S/R$ ,  $4a\delta m/R$  に比べ大変小さいので、定数  $\theta$  と取り扱う。

$$(8) \quad \frac{dS}{dR} = \frac{1}{S} \left[ \frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} \left( 1 + \frac{6S^2}{4R^4} \right) + \frac{S^2}{R} \right] \quad E^4 = e^2(e^2 + 2m^2) \\ \cong \frac{1}{S} \left[ \frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} (1 + \theta) + \frac{S^2}{R} \right]$$

積分公式を使って近似微分方程式 (式 8) を解くと (式 9) になる。

判別式  $\Delta = E^4 - 2a^2m^2(1 + \theta)^2 > 0$  の場合

$$(9) \quad K = \frac{S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[ \frac{-4a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan \left( \frac{S + 2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \right) \right]$$

関数  $f(\theta)$  を (eq.10) のように定め  $\theta$  についてマクローリン級数展開し、 $\theta^2$  の高次項を省略する。

$$(10) \quad f(\theta) = \frac{S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4}{R^2} \text{EXP} \left[ \frac{-4a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan \left( \frac{S + 2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \right) \right] - K = 0$$

$r$  は非常に大きく  $\arctan \left( \frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) = \pi/2 + \pi N - \frac{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}}{r\sqrt{3mr}}$  となるので、(式 11) が得られる。

$$(11) \quad K = \frac{3mr}{2} \text{EXP} \left[ \frac{-2a\delta m\pi(1 + 2N)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{30a\delta m^2E^4}{r[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\pi(1 + 2N)}{2} \right]$$

積分定数  $K$  は中心核星に属する全ての惑星に共通であるので、基準惑星を  $r_1, M_1, N - M_1 = n - 1$ 、基準惑星との遠日点・近日点距離比を  $\xi = r/r_1$  とすると (式 12) になる。

$$(12) \quad \xi = \left[ 1 - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[ \frac{4am\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \right] + \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$\delta = \pm 1$  は惑星軌道の回転方向に関するものである。

一方、ティティウス・ボーデ法則は次のように変形される。

$$\xi_{Earth} = 0.4 + 0.3 \times 2^n = (1 - 0.4) \cdot 2^{n-1} + 0.4 \quad (\xi_{Earth} : \text{地球基準の } \xi)$$

こうして (式 12) は、ティティウス・ボーデ法則 と式形式が一致し、法則が証明された。

## 5. あとがき

カー・ニューマン解は拡張された無毛定理を満たさないものの、アインシュタイン・マクスウェル方程式の唯一の軸対称定常解として認められているため、大局的近似においてミンコフスキー時空のニュートン運動力学よりも遥かに正確で有用である。

(式 8) は定常状態における基本微分方程式であり、多くの解が存在するはずですが。(式 11) は(式 8) の近似解の 1 つです。

この解法はエネルギー的安定に関連しているため、太陽系惑星や 5000 以上の系外惑星の多くに適用できる。

(式 12) の  $\delta = \pm 1$  は軌道回転方向と関係があるので、逆回転方向の太陽系外惑星が存在することになり、それらは実際に確認されている [6]。

$\xi_{Earth} = 0.4 + 0.3 \times 2^n = 0.4 + (1 - 0.4) \cdot 2^{n-1}$  の係数 0.3 は独立してなく、係数 0.4 に依存している。従って 独立の定数は 2 個 (0.4 と 2) になるが、これは 3 要素 (m, e, a) から 1 個 ( $r_1$ ) を減じるためである。

(式 8) は、判別式  $\Delta = E^4 - 2a^2 m^2 (1 + \theta)^2 < 0$  or zero. の場合に拡張できる。

今後、太陽や土星などの星の m, e, a の 3 つの基本要素が決定されることを期待している。

## References

- 1) Hans Merkl, (2020) The Secret of the Titius-Bode Law: A New Theory on How Our Planetary System Came Into Existence, Jou. of Geography and Geology 11(4):58 DOI:10.5539/jgg.v11n4p58
- 2) Misner, Charles W.; Thorne, Kip S.; Wheeler, John Archibald (1973). *Gravitation*. San Francisco.
- 3) Boyer R H and Lindquist R W, (1967) Maximal analytic extension of the Kerr metric, Journal Math. Phys. 8 265-281.
- 4) Internet General Relativity, Black Holes and Cosmology, Andrew J.S. Hamilton, (2020) p207-, Boyer-Lindquist metric. [http://jila.colorado.edu/~ajsh/ast5770\\_14/grbook.pdf#search=%27general+relativity%2C+black+hole+and+cosmology%27](http://jila.colorado.edu/~ajsh/ast5770_14/grbook.pdf#search=%27general+relativity%2C+black+hole+and+cosmology%27), accessed in 2020.
- 5) Internet Euler-Lagrange Differential Equation, <http://mathworld.wolfram.com/Euler-LagrangeDifferentialEquation.html>, accessed in 2017.
- 6) Winn & Fabrycky, (2015) The Occurrence and Architecture of Exoplanetary Systems. Annual Review of Astronomy and Astrophysics 53: p.409-2015.

# (大要) 相対論カー・ニューマン解を利用した 太陽系惑星軌道ティティウス・ボーデ法則、土星リング数 最大 31 個 (含む 主リング最大 9 個) および ファインリング径 の導出

本文は、カー・ニューマン解と無毛定理の関係を詳しく記述していないので不十分である。2024.7

犬山 文孝 元 九電産業(株)環境部部長  
谷口 佐由利 星空愛好者 Senior Power Engineer

## はじめに

太陽系惑星軌道に関する美しいティティウス・ボーデ法則 ( $\xi = 0.4 + 0.3 \times 2^n$ ) は約 250 年前(1766 年)に発見されたが、現代まで物理的な証明ができないため、これは力学的な必然ではなく偶然だという考え方が主流となっている<sup>1)</sup>。著者は小惑星群軌道の安定性・外乱修復性を考えると何らかの必然性があると主張するものである。

惑星軌道は運動エネルギーと万有引力エネルギーを考慮したニュートン力学によって算出されることが多い。しかし、このニュートン力学に対してエネルギー的安定であるエネルギー最小原理を適用すると、安定軌道半径は唯一の値となり、実現象と完全に食い違っている。この要因は惑星軌道を支配する要素の抽出が不足している為である。

安定軌道を支配するその他のエネルギー要素として、一般相対性理論 (1915 年に発見) の厳密解であるカー・ニューマン解 (1965 年に発見) から導かれる電荷エネルギーと回転エネルギーがある。つまり、太陽などの中心核星の質量・電荷・回転要素を取り入れた複雑なエネルギー式に対して、ニュートン力学の手法であるエネルギー最小原理を適用する。これによって 今まで不可解であったティティウス・ボーデ法則の物理的証明や同じ微分方程式を利用して土星リングの個数 最大 31 個(含む 主リング最大 9 個) が理論的に導出できる。質量・電荷・回転要素が絶妙にバランスする場合、ファインリング星が形成される。これは数学の数式計算であり、詳細な計算過程メモは別に示す<sup>2)</sup>。

## 解法フローの概要

解法フローの概要は次の通りであり、関連する方程式の番号を示す。

- 1) 一般相対性理論アインシュタイン方程式の厳密解であるカー・ニューマン解 (質量要素・回転要素・電荷要素を織り込み) から時空のエネルギー式を算出する。

$$f_1(\rho, \theta, d\rho/dt, d\theta/dt, d\varphi/dt, \varepsilon) = 0 \quad (\text{eq. 3})$$

- 2) エネルギー式を  $\theta$  で偏微分し、エネルギー最小の角度を算出すると  $\theta=\pi/2$  となるので、以下  $\theta=\pi/2$  の赤道面について計算する。

$$f_2(\rho, \pi/2, d\rho/dt, 0, d\varphi/dt, \varepsilon) = 0$$

- 3) 変分原理のオイラー・ラグランジュ方程式をカー・ニューマン解に適用し  $d\varphi/dt$  を求めて、角運動量相当  $J$  を導入する。

$$\xi(\rho, d\varphi/dt, J) = 0 \quad (\text{eq. 6})$$

- 4) 軌道の遠日点距離・近日点距離  $R$  で 距離増分  $d\rho=0$  であるので、以下  $f_2$  を遠日点・近日点について計算する。

$$f_3(R, \pi/2, 0, 0, d\varphi/dt, \varepsilon) = 0 \quad (\text{eq. 7})$$

- 5)  $f_3(R, \pi/2, 0, 0, d\varphi/dt, \varepsilon) = 0$  の  $d\varphi/dt$  に  $\xi(\rho, d\varphi/dt, J) = 0$  を代入し、惑星軌道半径とエネルギーと角運動量相当の式を算出する。

$$f_4(R, \pi/2, 0, 0, J, \varepsilon) = 0 \quad (\text{eq. 9})$$

6) 軌道半径はエネルギーと角運動量相当の変数  $R = R(\varepsilon, J)$  なので、数学的テクニックとして、軌道半径をエネルギーで偏微分  $\partial R / \partial \varepsilon$  する。(エネルギーを軌道半径で偏微分すると角運動量相当の取り扱いに困窮)。つまり  $f_4$  を  $\varepsilon$  で偏微分する。

$$g(R, J, \varepsilon, \partial R / \partial \varepsilon) = 0 \quad (\text{eq. 10})$$

7)  $f_4(R, \pi/2, 0, 0, J, \varepsilon) = 0$  から角運動量相当  $J$  の式を導き、 $g(R, J, \varepsilon, \partial R / \partial \varepsilon) = 0$  に代入して、数値解でなく軌道の解析的特徴に繋がる軌道半径とエネルギーだけの重要な微分方程式にする。

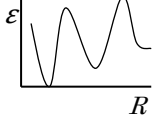
$$h(R, \varepsilon, d\varepsilon/dR) = 0 \quad (\text{eq. 11})$$

8) 軌道半径の微分方程式  $h$  を解くと、積分定数  $K$  が出てくる。(arctan, log, べき乗 等の関数が出現)

$$H(R, \varepsilon, K) = 0 \quad (\text{eq. 14}) \quad (\text{eq. 15})$$

9) 軌道半径のエネルギー的安定に対してエネルギー最小(極小)原理  $d\varepsilon/dR = 0$  を適用し、微分方程式の解  $H$  と  $h$  を連立させる。

$$H(r, \varepsilon_{min}, K) = 0 \quad \textcircled{1} \quad h(r, \varepsilon_{min}, 0) = 0 \quad (\text{eq. 16}) \quad \textcircled{2}$$



10) 積分定数  $K$  は全惑星に共通であることから、基準惑星・基準リングを定めると、微分方程式の判別式に応じてティティウス・ボーデ法則、土星リング、ファインリングが物理的に証明される。

$$I(r, K) = 0 \quad (\text{eq. 23}) \quad (\text{eq. 26}) \quad (\text{eq. 27})$$

なお、代数計算では高次微小項の省略は勿論のこと、代数学では解けないリッカチ微分方程式よりも複雑な微分方程式を解くために 近似計算やマクローリン級数展開を行っている。

$$(\text{eq. 13}) \quad (\text{eq. 20})$$

## 第1章 エネルギー方程式

### 1・1 エネルギー方程式の導入

ブラックホール脱毛定理・ブラックホール唯一性定理 において、すべての現実的なブラックホールは、カー・ニューマン解のブラックホールに落ち着くと考えられている。本解析の前提条件は、一般相対論カー・ニューマン解(エネルギー運動量テンソル=0)の前提条件のほかに次の3つである。

- ① 調査対象の空間座標は原点の惑星系の中心核星の近傍ではなく、中心核星から充分離れている。
- ② 中心核星の回転はそれほど速くなく、相対性理論 カー解に特有なボイヤー・リンクスト座標は  $a/\rho$  の1次オーダーで、一般球座標と同等になる<sup>3)</sup>。
- ③ エネルギー方程式は特殊相対論のローレンツ変換係数  $\gamma$  と同様に、一般相対論カー・ニューマン解  $\Gamma$  から導かれる。また、惑星やダーク体のエネルギー運動量テンソルは無視できる。

厳密なカー・ニューマン解はボイヤー・リンクスト座標を用いて次のように表される<sup>4)</sup>。

$$ds^2 = -\frac{R^2 \Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\rho^2}{R^2 \Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{R^4 \sin^2 \theta}{\rho^2} \left( d\phi - \frac{a}{R^2} dt \right)^2$$

半径  $r$  が大きくなると、ボイヤー・リンクスト座標の近似化によって次のようになる。

$$ds^2 \rightarrow -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{4aM \sin^2 \theta}{r} dt d\phi + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

ここからは、記号をボイヤー・リンクスト座標から *普通の極座標* に変える。

一般相対性理論のアインシュタイン方程式を厳密に解き中心核星の質量要素  $m$ 、回転要素  $a$  と電荷要素  $e$  を織り込んだ近似カー・ニューマン解は (式1) である。

$$(1) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{2m\rho - e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) (cdt)^2 - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 - 2m\rho + e^2} d\rho^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 \\ - \left[ (\rho^2 + a^2) + \frac{(2m\rho - e^2)a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2(2m\rho - e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} cdt \cdot d\varphi$$

$ds$  を時間成分 ( $cdt$ ) で割ると  $\Gamma$  は次のようになる。

$$\frac{1}{\Gamma^2} = \left(\frac{ds}{cdt}\right)^2$$

特殊相対性理論のミンコフスキー時空に関わるローレンツ変換係数  $\gamma (= cdt/ds)$  は重要なエネルギー式  $E = Mc^2 = M_0 \gamma c^2$  の根原であるように、 $\gamma$  の拡張である一般相対性理論の  $\Gamma (= cdt/ds)$  もエネルギー式の根原である。

このことから「エネルギー極小原理」の  $E$  を標榜すると  $m$  の符号は反転して  $-m$  に、 $m$  がマイナスなので  $a$  の符号はそのまま  $+a$  に、 $e$  の符号はそのまま  $+e$  にする。

つまり、エネルギー式は  $E = \Gamma(\rho, \theta, \varphi, t, -m, a, e)$ 、(式2) になる。

$$(2) \quad \frac{1}{E^2} = \left(1 + \frac{2m\rho + e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right) - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 \\ - \left[ (\rho^2 + a^2) - \frac{(2m\rho + e^2)a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 + \frac{2(2m\rho + e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)$$

$E$  には支配的な質量エネルギー  $M_0 c^2$  が含まれるので、エネルギー  $\varepsilon$  (式3) に変数変換する。

$$\frac{1}{E^2} = 1 - 2\varepsilon \quad \left( \frac{dE}{E^3} = d\varepsilon \text{ である} \right)$$

$$(3) \quad -2\varepsilon = \frac{2m\rho + e^2}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 - (\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 \\ - \left[ (\rho^2 + a^2) - \frac{(2m\rho + e^2)a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right] \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 + \frac{2(2m\rho + e^2)a \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)$$

エネルギー  $\varepsilon(\rho, \theta, \varphi, t)$  が極小となる座標を求めるため、 $\partial\varepsilon/\partial\theta = 0$  を計算する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(2m\rho + e^2)a^2}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} + \frac{a^2}{\rho^2 + a^2 + 2m\rho + e^2} \left(\frac{d\rho}{cdt}\right)^2 + a^2 \left(\frac{d\theta}{cdt}\right)^2 \\ - \left[ (\rho^2 + a^2) - \frac{(2m\rho + e^2)2a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} - \frac{(2m\rho + e^2)a^4 \sin^4 \theta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right)^2 \\ + \left[ \frac{2(2m\rho + e^2)a}{\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta} + \frac{2(2m\rho + e^2)a^3 \sin^2 \theta}{(\rho^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} \right] \left(\frac{d\varphi}{cdt}\right) \end{array} \right\} \cdot \sin 2\theta = 0$$

つまり、回転の遅い**中心核星の回転軸の赤道面 ( $\theta = \pi/2$ )**において  $E, \varepsilon$  は極小となり、惑星は**エネルギー的に安定な赤道面に集まる**。この結論は渦巻銀河の周辺部ディスクについても成立する<sup>2)</sup>。

## 1・2 変分原理による時間成分

中心核星の回転が遅く、近似カー・ニューマン解を  $a/\rho$  の1次オーダーで展開すると (式4) になる。

$$(4) \quad \left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = 1 = \left(1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}\right) \left(\frac{cdt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - \rho^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \\ - \frac{2a}{\rho} \left(2m - \frac{e^2}{\rho}\right) \sin^2 \theta \left(\frac{cdt}{ds}\right) \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)$$

これを変分問題として考え、オイラー・ラグランジュ方程式<sup>5)</sup> に入れる。

$$\delta \int \left[ \left( 1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{cdt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2}} \left( \frac{d\rho}{ds} \right)^2 - \rho^2 \left\{ \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \sin^2\theta \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right\} - \frac{2a}{\rho} \left( 2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \sin^2\theta \left( \frac{cdt}{ds} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right) \right] ds = 0$$

これによって、エネルギー的に安定な中心核星の赤道面では (式5) が得られる。

以下  $\theta = \pi/2$  とする。

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} \left[ \left( 1 - \frac{2m}{\rho} + \frac{e^2}{\rho^2} \right) \left( \frac{cdt}{ds} \right) - \frac{a}{\rho} \left( 2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right) \right] = 0 & \text{時間成分} \\ \frac{d}{ds} \left[ \rho^2 \left( \frac{d\varphi}{ds} \right) + \frac{a}{\rho} \left( 2m - \frac{e^2}{\rho} \right) \left( \frac{cdt}{ds} \right) \right] = 0 & \varphi \text{成分} \quad (\theta \text{成分については } 0) \end{cases}$$

(式5) の両式を  $ds$  で積分し、この連立方程式から  $J$  を積分数として  $d\varphi/dt$  (式6) を求める。

$$(6) \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left( \frac{d\varphi}{ds} \right)}{\left( \frac{dt}{ds} \right)} = \frac{J \left( \rho - 2m + \frac{e^2}{\rho} \right) + a \left( \frac{e^2}{\rho} - 2m \right)}{\rho^3 + Ja \left( 2m - \frac{e^2}{\rho} \right)} \cdot c \quad \begin{array}{l} J: \text{角運動量相当} \\ \text{(相対論 Carter constant の一種)} \end{array}$$

ここで距離記号の説明をしておく。

$\rho$ : 3次元又は2次元座標における任意の軌道距離

$R$ : 中心核星の赤道面における遠日点・近日点距離

$r$ : 赤道面におけるエネルギー的に安定の遠日点・近日点距離

### 1・3 角運動量相当の導出

遠日点・近日点距離  $R$  において  $\rho$  の増分  $d\rho=0$  であるので、エネルギーは (式7) になる。

$$(7) \quad 0 = 2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} - R^2 \left( \frac{d\varphi}{cdt} \right)^2 + \frac{4a}{R} \left( m + \frac{e^2}{2R} \right) \left( \frac{d\varphi}{cdt} \right)$$

角運動量相当から求められた  $d\varphi/cdt$  (式6) をエネルギー (式7) に代入し、 $R$  の2次オーダーまでを採用すると、 $J$  は (式8) になる。

$$(8) \quad J = \frac{4am + R\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}}{R^2(R - 2m + C) - a(2m - C)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)}} R^2$$

ここで、 $\delta = \pm 1$   $C = e^2/R$  としている。 $\delta$  は軌道と中心核星の回転方向に関わるものである。

## 第2章 Space Fantasy 微分方程式

### 2・1 Space Fantasy 微分方程式の導出

数値解でなく軌道の特徴に繋がる解析解を得ることにする。 $R$ ,  $\varepsilon$ ,  $J$  の関係は、角運動量相当 (式8) を変形すると (式9) になり、Kepler-Newton 式  $2\varepsilon R^2 + 2mR - J^2 = 0$  より遥かに複雑である。

$$(9) \quad 0 = 2\varepsilon + \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} - R^2 \left[ \frac{J \left( R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left( \frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left( 2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right]^2 + \frac{4a}{R} \left( m + \frac{e^2}{2R} \right) \left[ \frac{J \left( R - 2m + \frac{e^2}{R} \right) + a \left( \frac{e^2}{R} - 2m \right)}{R^3 + Ja \left( 2m - \frac{e^2}{R} \right)} \right]$$

惑星軌道  $R$  はエネルギー  $\varepsilon$  と角運動量相当  $J$  から決まるので  $R = R(\varepsilon, J)$  である。(式 9) の  $R$  を  $\varepsilon$  で偏微分し、 $\partial R/\partial \varepsilon$  の逆数を探ると (式 10) になる。

$$(10) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} [R^3 + Ja(2m - C)]^2 = \frac{(m + C)[R^3 + Ja(2m - C)]^2}{R^2} + \frac{[J(R - 2m + C) - 2am + aC] [J(R - 2m + C) + 3aC] \cdot R}{1} + \frac{2R^2[J(R - 2m + C) - 4am] [J^2a(m - C) - JR^2(R - 3m + 2C) + aR^2(3m - 2C)]}{R^3 + Ja(2m - C)}$$

ここで (式 8)  $J$  を (式 10) に代入し、 $R$  の 2 次オーダーまで採用する。

このタフな計算過程<sup>2)</sup> を経て、結果として  $\varepsilon$  と  $R$  の関係は (式 11) になる。

$$(11) \quad \frac{d\varepsilon}{dR} R^4 (R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) = mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon \cdot 2R^3(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) + 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} + \varepsilon \cdot 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \quad C = e^2/R \quad (R \text{ 2 次オーダー})$$

(式 11) の 2 次オーダー微分方程式を **Space Fantasy 微分方程式** と呼ぶ。

Space Fantasy 微分方程式を解くために、変数変換  $S$  を行うと (式 12) になる。

$$(12) \quad S = R\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \quad \frac{dS}{dR} = \frac{2e^2(e^2 + 2m^2)}{SR} + \frac{4a\delta m + S}{R} + \frac{6a\delta m S^2}{R^5} \quad (R \text{ 0 次オーダー})$$

この微分方程式はリッカチ微分方程式よりも複雑な形であり、リッカチ微分方程式の厳密な一般解は初等代数学で解けないことが証明されている<sup>6)</sup>。そこで  $6a\delta m S^2/R^5$  は  $S/R$ ,  $4a\delta m/R$  に比べ微小であるので、定数扱い  $\theta$  にした近似微分方程式 (式 13) を考える。

$$(13) \quad \frac{dS}{dR} = \frac{1}{S} \left[ \frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} \left( 1 + \frac{6S^2}{4R^4} \right) + \frac{S^2}{R} \right] \quad E^4 = e^2(e^2 + 2m^2) \\ \cong \frac{1}{S} \left[ \frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} (1 + \theta) + \frac{S^2}{R} \right] \quad \theta = \frac{3S_0^2}{2R_0^4} \quad (S_0^2, R_0^4 \text{ は重心点 } S^2/3, R^4/5)$$

$$\frac{SdS}{S^2 + 4a\delta m S(1 + \theta) + 2E^4} = \frac{dR}{R}$$

積分公式<sup>7)</sup> を使って微分方程式 (式 13) を解くと (式 14) ~ (式 17) になる。

判別式  $\Delta = E^4 - 2a^2m^2(1 + \theta)^2 > 0$  の場合

$$\frac{1}{2} \log[S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4] - \frac{4a\delta m(1 + \theta)}{2\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan\left(\frac{2S + 4a\delta m(1 + \theta)}{2\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}}\right) = \log R + K$$

従って

$$(14) \quad K = \frac{S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[ \frac{-4a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan\left(\frac{S + 2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}}\right) \right]$$

判別式  $\Delta = E^4 - 2a^2 m^2(1+\theta)^2 < 0$  の場合

$$\log[S^2 + 4a\delta m S(1+\theta) + 2E^4] - \frac{2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \cdot \log \left[ \frac{S + 2a\delta m(1+\theta) - \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta m(1+\theta) + \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \right] = 2 \log R + K$$

従って

$$(15) \quad K = \log \left[ \frac{\frac{S^2 + 4a\delta m S(1+\theta) + 2E^4}{R^2}}{\left[ \frac{S + 2a\delta m(1+\theta) - \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta m(1+\theta) + \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \right]^{\frac{2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}}} \right]$$

判別式  $\Delta = E^4 - 2a^2 m^2(1+\theta)^2 = 0$  の場合

$$(16) \quad K = \frac{S + \sqrt{2}E^2}{R} \text{EXP} \left[ \frac{\sqrt{2}E^2}{S + \sqrt{2}E^2} \right]$$

## 2・2 エネルギー極小軌道の条件

(式 11) SF 微分方程式でエネルギー極小の条件は  $\partial \varepsilon / \partial R = 0$  であるので、 $\varepsilon$  の 3 次方程式になる。

$$\begin{aligned} 0 = & \varepsilon^3 \cdot 32a^2 r^3 (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm)^2 \\ & + \varepsilon^2 \cdot r^2 \left[ \begin{aligned} & 16a^2 (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm)^2 (2m + C) \\ & + 32a^2 m (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2) (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm) \\ & - 4r^3 (-r^2 + 6mr - 4Cr - 8m^2)^2 \end{aligned} \right] \\ & + \varepsilon \cdot 4mr \left[ \begin{aligned} & 2a^2 m (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2 \\ & + 4a^2 (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2) (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm) (2m + C) \\ & - r^3 (-r^2 + 8mr - 4Cr - 12m^2) (-r^2 + 6mr - 4Cr - 8m^2) \end{aligned} \right] \\ & + m^2 [4a^2 (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2 (2m + C) - r^3 (-r^2 + 8mr - 4Cr - 12m^2)^2] \end{aligned}$$

微小根の 3 次方程式を解き、エネルギー極小原理に従い最も 0 に近い  $\varepsilon_{min}$  (式 17) を採用する。

$$(17) \quad \varepsilon_{min} = \frac{-m}{4r} \cdot \frac{r^3 (r^2 - 8mr + 4Cr + 12m^2)^2 - 4a^2 (2m + C) (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2}{\left[ \begin{aligned} & r^3 (r^2 - 8mr + 4Cr + 12m^2) (r^2 - 6mr + 4Cr + 8m^2) \\ & - 4a^2 (2m + C) (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2) (3mr - 2Cr - 6m^2 + 7Cm) \\ & - 2a^2 m (2r^2 + 2mr - Cr - 12m^2)^2 \end{aligned} \right]}$$

$$\equiv \frac{-m}{4r} \quad (r \text{ 0 次オーダー})$$

変数変換した (式 12)  $S = r\sqrt{r(2\varepsilon r + 2m + C)}$  に (式 17)  $\varepsilon_{min}$  を代入する。

$$\begin{aligned} S^2 = & \frac{-mr^4}{2} \cdot \frac{r^4 (r^2 - 8mr + 4e^2 + 12m^2)^2 - 4a^2 (2mr + e^2) (2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)^2}{\left[ \begin{aligned} & r^5 (r^2 - 8mr + 4e^2 + 12m^2) (r^2 - 6mr + 4e^2 + 8m^2) \\ & - 4a^2 (2mr + e^2) (2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2) (3mr^2 - 2e^2 r - 6m^2 r + 7me^2) \\ & - 2a^2 mr^2 (2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)^2 \end{aligned} \right]} \\ & + r^2 (2mr + e^2) \\ = & \frac{r^4 \times [r^8 \text{ の多項式}] + r^2 (2mr + e^2) \times [r^9 \text{ の多項式}]}{[r^9 \text{ の多項式}]} = \frac{r^2 \times P}{Q} \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{3m}{2} r^3 \quad (r \text{ 0 次オーダー})$$

ここで  $P, Q$  は (式 18), (式 19) である。

$$(18) \quad \text{分子 } P = -mr^2/2 [r^4(r^2 - 8mr + 4e^2 + 12m^2)^2 - 4a^2(2mr + e^2)(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)^2] \\ + (2mr + e^2) \times Q \quad [L^{11}] [r^{10} \text{ の多項式}]$$

$$(19) \quad \text{分母 } Q = r^5(r^2 - 8mr + 4e^2 + 12m^2)(r^2 - 6mr + 4e^2 + 8m^2) \\ - 4a^2(2mr + e^2)(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)(3mr^2 - 2e^2r - 6m^2r + 7me^2) \\ - 2a^2mr^2(2r^2 + 2mr - e^2 - 12m^2)^2 \quad [L^9] [r^9 \text{ の多項式}]$$

また、 $\theta$  について

$$\theta = \frac{3S_0^2}{2R_0^4} = \frac{5S^2}{2r^4} = \frac{5P}{2Qr^2}$$

$$\equiv \frac{15m}{4r} \quad (r \text{ 0 次オーダー})$$

惑星軌道のように大きく離れた飛び飛びの固有値問題に対して、グロスな 0 次オーダーの  $\varepsilon_1, S$  を使う。土星リングの個数のように繊細な微小差で僅かな違いを問題にする場合、1 次オーダー、又は 2 次オーダーの  $\varepsilon_1, S$  を、更に緻密な土星リングの軌道ではカルダノの公式による 3 次方程式の根を使う。

### 第 3 章 ティティウス・ボーデ法則

#### 3・1 ティティウス・ボーデ法則の証明

SF 微分方程式の判別式が正の場合

(式 14) を関数  $f(\theta)$  として、マクローリン級数展開し  $\theta^2$  以上の高次項は無視すると (式 20) になる。

$$f(\theta) = \frac{S^2 + 4a\delta m(1 + \theta)S + 2E^4}{R^2} \cdot \text{EXP} \left[ \frac{-4a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \arctan \left( \frac{S + 2a\delta m(1 + \theta)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2(1 + \theta)^2}} \right) \right]$$

$$-K = 0$$

$$f(\theta) = f(0) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{\partial f(0)}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f(0)}{(\partial \theta)^2} \theta^2 + \dots = 0$$

$$(20) \quad f(\theta) = \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[ \frac{-4a\delta m}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \arctan \left( \frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right] \times \\ \times \left[ 1 - \frac{30a\delta m^2 E^4}{r[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \times \arctan \left( \frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) \right] - K = 0$$

$r$  が充分大きいとして  $\arctan \left( \frac{r\sqrt{3mr}}{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}} \right) = \frac{\pi}{2} + \pi N - \frac{2\sqrt{E^4 - 2a^2m^2}}{r\sqrt{3mr}}$  となるので、

$$K = \frac{3mr}{2} \cdot \text{EXP} \left[ \frac{-2a\delta m\pi(1 + 2N)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{30a\delta m^2 E^4}{r[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\pi(1 + 2N)}{2} \right]$$

積分定数  $K$  は中心核星に属する全ての惑星に共通であるので、基準惑星を  $r_1, M_1, N - N_1 = n - 1$ 、基準惑星との遠日点・近日点距離比を  $\xi = r/r_1$  とすると (式 21) になる。

$$(21) \quad n - 1 = \frac{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}}{4a\delta m\pi} \cdot \log \left[ \frac{\xi - \frac{15a\delta m^2 E^4 \pi (2N_1 + 2n - 1)}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}}{1 - \frac{15a\delta m^2 E^4 \pi (2N_1 + 1)}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}} \right]$$

一方、ティティウス・ボーデ法則は (式 22) になる。

$$\xi_{Earth} = 0.4 + 0.3 \times 2^n = 0.4 + 0.6 \times 2^{n-1} \quad (\xi_{Earth} : \text{地球基準の } \xi)$$

$$(22) \quad n-1 = \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{\xi_{Earth} - 0.4}{1 - 0.4}$$

ティティウス・ボーデ法則 (式 22) は SF 微分方程式近似解 (式 21) と酷似しており、2 個の係数が等しいとすることによって ほぼ一致する。(基準惑星の地球は  $n=1$ )

$$\frac{1}{\log 2} = \frac{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}}{4a\delta m\pi} \quad 0.4 = \frac{15a\delta m^2 E^4 \pi (2N_1 + 1)}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}$$

地球の  $r_1 = 1.5 \times 10^8 km$  太陽の  $m=1.476km$   $a=0.32km$  として試算すると<sup>8)</sup>

$e = 2.1km$   $N_1 = 1.5 \times 10^7$  となり  $N_1$  が非常に大きく、(式 21) 右辺の  $2n$  は省略できる。従って

$$(23) \quad \xi = \left[ 1 - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[ \frac{4am\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right] + \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}$$

ここで  $\delta = \pm 1$  は軌道回転方向に関わるものである。[ $\delta(n-1)$  は  $(n-1)$  に変換できる]

中心核星の回転方向と惑星軌道の回転方向が同じ場合  $\delta = +1$  である。

また、ティティウス・ボーデ法則は、惑星軌道の長径を採用して表示しているの、軌道の遠日点半径・近日点半径をそれぞれ  $r_F, r_N$  とすると、(式 23)は

$$\xi_{\delta=+1} = \frac{r_F + r_N}{r_{1F} + r_{1N}} = \left[ 1 - \frac{60am^2 E^4 \pi N_1}{(r_{1F} + r_{1N})(2E^4 - 4a^2m^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[ \frac{4am\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right] + \frac{60am^2 E^4 \pi N_1}{(r_{1F} + r_{1N})[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}$$

一方、ティティウス・ボーデ法則は  $\xi_{Earth} = (1 - 0.4) \cdot 2^{n-1} + 0.4$  であり、その式構成が上式と同一である。こうして (式 23) は、ティティウス・ボーデ法則 (式 22) と一致し、法則が証明された。

### 3・2 中心核星と反対方向に回転する惑星軌道

(式 23)の  $\delta = \pm 1$  は軌道回転方向に関わるものであるの、 $\delta = -1$  つまり惑星軌道が中心核星と反対方向に回転している場合

$$\xi_{\delta=-1} = \left[ 1 + \frac{60am^2 E^4 \pi N_1}{(r_{1F} + r_{1N})(2E^4 - 4a^2m^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[ \frac{4am\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}} \right] - \frac{60am^2 E^4 \pi N_1}{(r_{1F} + r_{1N})[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}$$

となり、「惑星軌道半径の比が太陽系惑星のものと同逆転する」実現象<sup>9)</sup>が、系外惑星に発生する。

計算例として、太陽系と同じような係数  $\frac{1}{\log 2} = \frac{\sqrt{2E^4 - 4a^2m^2}}{4am\pi}$ ,  $0.4 = \frac{60a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{(r_{1F} + r_{1N})[2E^4 - 4a^2m^2]^{\frac{3}{2}}}$  の場合、 $\xi_{\delta=+1}$ ,

$\xi_{\delta=-1}$ ,  $r_n/r_{n-1}$  の結果を表 1 に示す。n が大きくなると  $\xi_{\delta=+1}$ ,  $\xi_{\delta=-1}$  の  $r_n/r_{n-1}$  は共に 2.0 になる。しかし、n=1 では  $r_n/r_{n-1}(\text{in } \xi_{\delta=+1})=1.4 < 2.0$ ,  $r_n/r_{n-1}(\text{in } \xi_{\delta=-1})=3.3 > 2.0$  である。つまり、 $r_n/r_{n-1}$  は  $\xi_{\delta=+1}$  の場合 単調増加であり、 $\xi_{\delta=-1}$  の場合  $n > 1$  の領域で単調減少である。

このように一部の太陽系外惑星には中心核星と逆回転方向の惑星系が理論的に存在する。

$$\xi_{\delta=+1} = (1 - 0.4) \cdot 2^{n-1} + 0.4 \quad \xi_{\delta=-1} = (1 + 0.4) \cdot 2^{n-1} - 0.4$$

表 1 n と惑星軌道半径  $r_n/r_{n-1}$  の比

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\xi_{\delta=+1} (1 - 0.4) \cdot 2^{n-1} + 0.4$	0.4	0.5	0.6	0.7	1	1.6	2.8	5.2	10	20	39	77
$r_n/r_{n-1}$	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.6	1.8	1.9	1.9	2.0	2.0	2.0
$\xi_{\delta=-1} (1 + 0.4) \cdot 2^{n-1} - 0.4$	-0.3	-0.2	-0.1	0.3	1	2.4	5.2	11	22	44	89	180
$r_n/r_{n-1}$	0.9	0.7	0.2	-6.0	3.3	2.4	2.2	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0

## 第4章 土星リング

### 4・1 土星リングの個数

土星の自転速度は速いので、SF 微分方程式の判別式  $\Delta = E^4 - 2a^2 m^2(1+\theta)^2 < 0$  として、リングの軌道計算でなく リング個数を考察する。(式 15) は

$$K = \log \left[ \frac{\frac{S^2 + 4a\delta m S(1+\theta) + 2E^4}{R^2}}{\frac{S + 2a\delta m(1+\theta) - \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta m(1+\theta) + \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \cdot \frac{2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}} \right]$$

対数関数の分母  $\frac{S + 2a\delta m(1+\theta) - \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}{S + 2a\delta m(1+\theta) + \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \cdot \frac{2a\delta m(1+\theta)}{\sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}$  を級数展開し  $(1-\lambda)$  で表すと、 $\lambda$  は非常に小さく ( $\neq 0$ )、SF 微分方程式の解は (式 24) になる。

$$(24) \quad K = \frac{S^2 + 4a\delta m S(1+\theta) + 2E^4}{r^2} \cdot \frac{1}{(1-\lambda)}$$

積分定数  $K$  は全てのリングについて共通であり、また、基準リングを  $r_1$ 、基準の  $K$  を  $F$  とすると  $S$  の多項式 (式 25) になる。

$$(25) \quad S^4 - 2S^2[F(1-\lambda)r^2 - 2E^4 + 8a^2 m^2(1+\theta)^2] + [F(1-\lambda)r^2 - 2E^4]^2 = 0$$

(式 25) の  $S, \theta$  に  $P$  (式 18),  $Q$  (式 19) を代入して  $r$  の多項式で表すと (式 26) になる。

$$(26) \quad Qr^2 (Pr^2 - Q[F(1-\lambda)r^2 - 2E^4])^2 - 4a^2 m^2 P (2Qr^2 + 5P)^2 = 0$$

(式 26) の次数は第 1 項  $Qr^2 P^2 r^4$  の次数が最も高く  $r$  の 35  $[9+2+10 \times 2+4]$  乗であるので、(式 26) は **高次係数  $\lambda$  が付いている  $r^{35}$  の多項式** である。この結果 35 個の根があるが、大きい  $F \sim mr_1$  が最初に現れる低次項は  $-F(1-\lambda)r^4 4E^4 Q^3$  であり、これに関わる微小根 4 個を除くと **土星などリング星の群・リングは最大 31 個 存在する** ことになる。更に、大きな  $F^2$  係数が付いていない項は微小解や遠方解に関わるものであり、省略すると  $Qr^2 Q^2 F^2 (1-\lambda)^2 r^4 \sim 0$  従って  $Q \sim 0$ 。この結果、**メインリングは最大 9 個** ある。

( $r$  の複素数根・マイナス根・重根、中心核星の膨らみによって、実際の有効な  $r$  のプラス根は減る。) しかし、リング個数の考察でなく 微細な線条軌道を計算する上で  $a_3 r^3, a_2 r^2, a_1 r^1, a_0 r^0$  の項も無視できない。

### 4・2 中心核星の回転方向と逆回転リング

$\delta = \pm 1$  はリング回転方向に関わるものである。 $\lambda$  及び  $F$  は  $\delta = \pm 1$  を含んでいるので、 $\delta = -1$  つまり中心核星の回転方向と逆回転リングのリング星が存在する。この場合 (式 24) は次式のようになる。また、リングは最大 31 個 存在することになる。

$$1 - \lambda = \frac{S - 2am(1+\theta) - \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}{S - 2am(1+\theta) + \sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}} \cdot \frac{-2am(1+\theta)}{\sqrt{4a^2 m^2(1+\theta)^2 - 2E^4}}$$

$$K = \frac{S^2 - 4amS(1+\theta) + 2E^4}{r^2} \cdot \frac{1}{(1-\lambda)}$$

## 第5章 ファイン リング星

回転の影響等のバランスが絶妙であり、SF 微分方程式の判別式が  $\Delta = 2E^4 - 4a^2 m^2(1+\theta)^2 = 0$  である場合を考える。SF 微分方程式の原点に戻ると

$$\frac{dS}{dR} = \frac{1}{S} \left[ \frac{2E^4}{R} + \frac{4a\delta m S}{R} \left( 1 + \frac{3S^2}{2R^4} \right) + \frac{S^2}{R} \right] \quad E^4 = e^2(e^2 + 2m^2)$$

$$\text{判別式は } \Delta = 2E^4 - 4a^2 m^2 \left( 1 + \frac{3S^2}{2R^4} \right)^2 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\text{微分方程式は } \frac{dS}{dR} = \frac{1}{S} \cdot \frac{(S + \sqrt{2}E^2)^2}{R} \quad \text{これを解くと}$$

$$K = \frac{S + \sqrt{2}E^2}{R} \text{EXP}\left(\frac{\sqrt{2}E^2}{S + \sqrt{2}E^2}\right) \quad \textcircled{2}$$

$$\text{エネルギー安定式は } S = r\sqrt{3mr/2} \quad \textcircled{3}$$

$r, S, K$  を未知数とする ①, ②, ③ の連立方程式を解くと (ここでは  $\delta = +1$  である)

$$(27) \quad r = \frac{9a\delta m^2}{2\sqrt{2}(E^2 - \sqrt{2}a\delta m)}$$

$m, e, a$  は小さな定数値であるが、概ね  $E^2 - \sqrt{2}a\delta m \simeq 0$  をならば非常に大きな  $r$  となる。つまり、

$$a^2 \simeq e^2 \left( 1 + \frac{e^2}{2m^2} \right)$$

の絶妙なバランスの場合、スーパーファインリング星を形成する。判別式を 0 とする絶妙なバランスから若干ズレている場合は、土星リングや太陽系惑星軌道の要素が混じるファインリングになる。

## 第6章 楕球惑星系

楕球惑星系では中心核星は回転していないので、(式 11) で  $a=0$  とすると (式 28) になる。

$$(28) \quad \frac{d\varepsilon}{dR} + \frac{2(R^2 - 6mR + 4CR + 8m^2)}{R(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)} \cdot \varepsilon = \frac{m(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2)}{R^2(R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2)}$$

また、エネルギー極大・極小の軌道条件は  $\partial\varepsilon/\partial R = 0$  であるので

$$\varepsilon = \frac{m(-r^2 + 8mr - 4e^2 - 12m^2)}{2r(r^2 - 6mr + 4e^2 + 8m^2)}$$

微分方程式 (式 28) の一般解を解き、エネルギー極小の条件を付けると、積分定数  $K$  は

$$K = \frac{mr^3(-r^2 + 8mr - 12m^2 - 4e^2)}{2(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2)} + \frac{(r^2 - 4mr + 14m^2 + e^2)mr - 6m^2(2m^2 + e^2)}{r^2 - 4mr + 4m^2 + 2e^2} - \frac{m(2m^2 + e^2)\pi(1 + 2N)}{2\sqrt{2}e}$$

$K$  は共通であるので、基準軌道を  $N_1, r_1$  として、 $N - N_1 = n - 1$  とすると (式 29) になる。

$$(29) \quad \left[ \frac{r_1^3(-r^2 + 8mr - 12m^2 - 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 2e^2)}{2r(r^2 - 4mr + 14m^2 + e^2)(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2)} - \frac{12m(2m^2 + e^2)(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2)}{(r^2 - 6mr + 8m^2 + 4e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 12e^2)(r^2 - 4mr + 4m^2 + 2e^2)} \right]$$

$$= F - \frac{\sqrt{2}(2m^2 + e^2)\pi(n-1)}{e}$$

$F$  は (式 29) で  $r=r_1$  である。(式 29) は自然数  $n$  (変数) の係数の付いたエネルギー極大・極小の  $r^7$  多項式であるので、楕球惑星系においてはエネルギー極小である最大 4 個 × 周期差  $n$  の楕球面が存在し、その楕球面内に軌道があることになる。 $r$  の複素数根・マイナス根・重根、中心核星の膨らみによって、実際の  $r$  のプラス根は減る。

## 第7章 まとめ

ティティウス・ボーデ法則は 250 年前に発見されたが、現代まで物理的な証明ができないため、これは力学的な必然ではなく偶然だという考え方が主流となっている。しかし、著者は本文頭に示した手順によって この法則を初めて証明し「天文学 250 年の謎」を解くとするとともに、土星のリングが最大 31 個あることを同じ Space Fantasy 微分方程式から物理学的に導き出した。

アインシュタイン方程式のカー・ニューマン解については、ブラックホール脱毛定理 (no-hair theorem) において、すべての現実的なブラックホールは、いずれ、角運動量・質量・電荷の 3 つの物理量のみを持つカー・ニューマンブラックホールに落ち着くと考えられている。また、「アインシュタイン・マクスウェル方程式での軸対称定常解は、カー・ニューマン解に限られる」というブラックホール唯一性定理 (uniqueness theorem) も存在する。<sup>10),11)</sup>

このように、本解析は、成熟した銀河系において安定した定常解であるカー・ニューマン解を利用しているので、成熟していない まだ若い遷移的銀河系に適用できない。また(式 11) は惑星のエネルギー運動量テンソルを無視することによって成立している。本解析で 4 個の重要な式は次の通りである。(式 11) は、成熟した銀河の安定した定常解であるカー・ニューマン解に従い、太陽系のみならず宇宙の惑星およびリング星に適用できる基礎微分方程式である。しかし、基礎微分方程式の近似解は多数あり、(式 23)や(式 26)は 1 個のエネルギー安定近似解である。

(式 21) は、基礎微分方程式の 1 個のエネルギー安定近似解であり、太陽系惑星のみならず、現在約 4000 個発見されている系外惑星のうち安定惑星の多くに適用できる。しかし、中心星に捕捉された彗星のようにまだ若く不安定な星・リングはもともと基礎微分方程式の対象外である。

(式 26) は、基礎微分方程式の 1 個のエネルギー安定近似解であり、土星リングや海王星リングのみならず、太陽系外のリング星のうち安定リング星の多くに適用できる。

$$(11) \quad \frac{d\varepsilon}{dR} R^4 (R^2 - 4mR + 2CR + 4m^2) \\ = mR^2(-R^2 + 8mR - 4CR - 12m^2) + \varepsilon \cdot 2R^3(-R^2 + 6mR - 4CR - 8m^2) \\ + 2am(2R^2 + 2mR - CR - 12m^2)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \\ + \varepsilon \cdot 4aR(3mR - 2CR - 6m^2 + 7Cm)\delta\sqrt{R(2\varepsilon R + 2m + C)} \quad C = e^2/R \quad (R \text{ 2ry order})$$

$$(23) \quad \xi = \left[ 1 - \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \text{EXP} \left[ \frac{4am\pi(n-1)}{\sqrt{2E^4 - 4a^2 m^2}} \right] + \frac{30a\delta m^2 E^4 \pi N_1}{r_1 [2E^4 - 4a^2 m^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$(26) \quad Qr^2 (Pr^2 - Q[F(1-\lambda)r^2 - 2E^4])^2 - 4a^2m^2P(2Qr^2 + 5P)^2 = 0$$

$P, Q$  は (式 18), (式 19) である。  $E^4 = e^2(e^2 + 2m^2)$   
 $\delta = \pm 1$  は軌道と中心核星の回転方向に関わるものである。

中心核星の 3 要素定数が特別に絶妙バランスする場合 ファイン リング星が存在する。

$$(27) \quad r = \frac{9a\delta m^2}{2\sqrt{2}(E^2 - \sqrt{2a\delta m})}$$

また、Space Fantasy 微分方程式 2 次オーダを用いて渦巻惑星系、楕球惑星系等の中心核星からの遠日・近日点距離は、理論体系的に中心核星の質量要素  $m$ 、回転要素  $a$ 、電荷要素  $e$  によって次のように整理される ( $m \neq 0$ )。なお、これは渦巻惑星系の場合 Space Fantasy 微分方程式の近似解であり、 $a$  の宇宙時間的減衰を考慮すると時系列的に楕球惑星系は晩期形態とも考えられる。

$a \neq 0$	$e^4 + 2e^2m^2 - 2a^2m^2 < 0$	$r^{35}$ 群多項式の解	(例：土星のリング)	}	渦巻惑星系
$a \neq 0$	$e^4 + 2e^2m^2 - 2a^2m^2 > 0$	周期解 SF ティティウス式	(例：太陽系惑星)		
$a = 0$	$e \neq 0$	周期解の周期差 $n \times r^7$ 多項式の解		}	楕球惑星系
$a = 0$	$e = 0$	$r^3$ 多項式の解			

本理論は一極中心核星の天空惑星系に適用されるものの、回転する中心核星に近いバルジ相応の空間で不適であるほか、ダーク体のエネルギー運動量テンソルを考慮すべき銀河系に適用できない。

### 【参考】 解析解と数値解

これまでエネルギー極小軌道を決定するために、軌道の特徴を明確にする Space Fantasy 微分方程式 (質量要素  $m$ 、回転要素  $a$ 、電荷要素  $e$  を含む) を導き出し、初等関数の解析解を得るように努めた。

しかし、この方法によらず数値的に軌道を計算する方法がある。SF 微分方程式を導出する際に 軌道半径  $R$  はエネルギー  $\varepsilon$  と角運動量相当  $J$  の関数  $R=R(\varepsilon, J)$  であり、 $R$  を  $\varepsilon$  で偏微分した。

一方、 $R=R(\varepsilon, J)$  から形式的に  $J=J(R, \varepsilon)$  が出るので、この  $J$  を  $\varepsilon$  で偏微分すると  $0=H(R, \varepsilon, dR/d\varepsilon)$  になる。これからエネルギー極小軌道は  $0=H(R, \varepsilon_{min}, 1/0)$  である。

また、 $0=H(R, \varepsilon, dR/d\varepsilon)$  を  $\varepsilon$  で積分すると積分定数  $K=J(R, \varepsilon_{min})$  に戻る。

$0=H(R, \varepsilon_{min}, 1/0)$  と  $K=J(R, \varepsilon_{min})$  から  $\varepsilon_{min}$  を消去すると  $R$  と  $K$  の関係式が得られる。

しかしながら、このベキ乗代数式の数値解から軌道の特徴は判り難い。

### 【参考】 $E=E(r, s)$ 微分 3 様の意味・用途

①  $dE(r, s) = 0$      $E(R, S) = K$     エネルギーが一定  $K$  である軌道。

②  $dE = \partial E(r, s)/\partial r \cdot dr + \partial E(r, s)/\partial s \cdot ds = 0$      $dr/ds = -\partial E(r, s)/\partial s / \partial E(r, s)/\partial r$   
 $R = R(S, K)$     エネルギー増分が 0 (極値) である特性微分方程式  $dr/ds$  の軌道解。

完全微分方程式  $dr/ds$  の厳密解は  $E(R, S) = K$  であるが  $E(R, S) = K$  を単純に代数計算しても複雑な高次数の多項式集合体になり、関数論的な軌道の特性は不明である。これに対し特性微分方程式は微小項を削除し、特徴を際立たせる。

具体的イメージとして、エネルギーがウネリ(大波)変動とサザナミ(小波)変動から構成されている場合、大局的なエネルギー変動の視点からサザナミ変動は大波に埋没し微小項として無視される。しかし、短時間に小刻みに変動する微細なエネルギー軌道に着目する場合、その変化速度(特性微分方程式)への影響が小さい緩慢なウネリ(大波)の微小項は省略できる。これが完全微分方程式の解と特性微分方程式の解の違いである。

③  $\partial E(r, s)/\partial r = 0$   $\partial E(r, s)/\partial s = 0$  の連立  $(R, S)$  エネルギーが極値であるポイント座標。

### 【参考】べき乗多項式の微小解と遠方解

① 低次数項の係数が小さい場合の近似微小解

$$(x^2 + ax + b)(x + \theta)(x + \xi) = 0 \quad \theta, \xi ; \text{微小}$$

$$x^4 + (a + \theta + \xi)x^3 + (a\theta + a\xi + \theta\xi + b)x^2 + (a\theta\xi + b\theta + b\xi)x + b\theta\xi = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad \text{--- } A, B : \text{同程度に大きい } C, D : \text{小さい}$$

$$\text{つまり } a = A, b = B, B\xi^2 - C\xi + D = 0 \quad \text{微小 } \theta, \xi = [C \pm \sqrt{C^2 - 4BD}] / 2B \doteq [\pm \sqrt{-D/B}]$$

$$(x^2 + Ax + B)(x + \theta)(x + \xi) \doteq 0 \quad \dots \dots C, D \text{は省略可}$$

② 高次数項の係数が小さい場合の近似遠方解

$$(x^2 + ax + b)(x + \theta)(x + \xi) = 0 \quad \theta, \xi ; \text{遠方大}$$

$$x^4 + (a + \theta + \xi)x^3 + (a\theta + a\xi + \theta\xi + b)x^2 + (a\theta\xi + b\theta + b\xi)x + b\theta\xi = 0$$

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \quad \text{--- } B, C, D : \text{同程度に大きい } A : \text{小さい}$$

$$\text{つまり } a = C/B, b = D/B, \xi^2 - A\xi + B = 0 \quad \text{遠方 } \theta, \xi = [A \pm \sqrt{A^2 - 4B}] / 2 \doteq [\pm \sqrt{-B}]$$

$$(Bx^2 + Cx + D)(x + \theta)(x + \xi) \doteq 0 \quad \dots \dots A \text{は省略可}$$

### 参考資料

- 1) Internet Titius-Bode law - Wikipedia  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Titius%E2%80%93Bode\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Titius%E2%80%93Bode_law), accessed in Jan 2018.
- 2) Internet 相対性理論による太陽系惑星軌道「ティティウス・ボーデ法則」および土星リング個数の導出 <https://sayuri-fumitaka.icurus.jp>. accessed in Sep 2017.
- 3) Internet Boyer-Lindquist coordinates - Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Boyer%E2%80%93Lindquist\\_coordinates](https://en.wikipedia.org/wiki/Boyer%E2%80%93Lindquist_coordinates), accessed in Jan 2018.
- 4) Internet General Relativity, Black Holes and Cosmology, Andrew J S. Hamilton  
[http://jila.colorado.edu/~ajsh/ast5770\\_14/grbook.pdf#search=%27general+relativity%2C+black+hole+and+cosmology%27](http://jila.colorado.edu/~ajsh/ast5770_14/grbook.pdf#search=%27general+relativity%2C+black+hole+and+cosmology%27), accessed in Jan 2018.
- 5) Internet Euler-Lagrange Differential Equation, <http://mathworld.wolfram.com/Euler-LagrangeDifferentialEquation.html>, accessed in Jan 2018.
- 6) Internet Riccati equation - Wikipedia (similar to Japanese)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Riccati\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Riccati_equation), accessed in Jan 2018.
- 7) 高等数学公式便覧：朝倉書店(株)、河村哲也監訳 井元薫訳 (p103)
- 8) 一般相対性理論入門：(株)ピアソン・エデュケーション、エドウィンFテイラー・ジョン・ア・アーチボルドホイラー著 牧野伸義訳 (p272)

- 9) Winn & Fabrycky (2015). "The Occurrence and Architecture of Exoplanetary Systems". *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 53 : p.409-
- 10) Internet No-hair theorem - Wikipediaen. [https://en.wikipedia.org/wiki/No-hair\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/No-hair_theorem), accessed in Jan 2018.
- 11) Internet Uniqueness theorem - Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Uniqueness\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Uniqueness_theorem) - accessed in Jan 2018.
- 12) 日本天文学会 2017年秋季年会 講演予稿集、2018年春季年会 講演予稿集 犬山文孝  
日本惑星科学会 2019, 2022年秋季講演会 講演予稿集 犬山文孝



渦巻銀河 (関連ページ 3)



楕円銀河 (関連ページ 8)



太陽系惑星 (関連ページ 7)



土星のリング（関連ページ 8） 以上全写真出典：NASA



ヨーロッパ南天天文台（ESO）が 2011 年 8 月に公開したファインリング星雲（Fine Ring Nebula）。輪のような風変わりな形状は、連星が白色矮星となった場合に生まれるという。〔これに対し著者は連星を必要としない(式 27)の変形を主張〕 Image courtesy ESO. [natgeo.nikkeibp.co.jp/nng/article/news/14/4682/](http://natgeo.nikkeibp.co.jp/nng/article/news/14/4682/) インターネット：リング状の特異な惑星状星雲 | ナショナルジオグラフィック日本版サイト

Fine Ring Nebula — captured here by the ESO Faint Object Spectrograph and Camera mounted on the New Technology Telescope at the La Silla Observatory in Chile.<sup>[1]</sup> Credit ESO.